Департамент образования, культуры и спорта Ненецкого автономного округа
ГБУ НАО «Ненецкий региональный центр развития образования»

СОГЛАСОВАНО

Протокол № 1 «17» мая 2021г.

заседания Методического совета
ГБУ НАО «НРЦРО»

УТВЕРЖДАЮ

Руководитель ГБУ НАО «НРЦРО»

_______________ О.Ю. Козицина

«17» мая 2021 г.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ ПРОГРАММА ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

ПОДГОТОВКА ЭКСПЕРТОВ ПРЕДМЕТНОЙ КОМИССИИ ГОСУДАРСТВЕННОЙ ИТОГОВОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫМ ПРОГРАММАМ ОСНОВНОГО ОБЩЕГО ОБРАЗОВАНИЯ В ФОРМЕ ОСНОВНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИКЕ

Автор – составитель:
Корельская Е.Ю.
должность: методист
регионального центра
оценки качества образования
ГБУ НАО «НРЦРО»

Нарьян-Мар
2021

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Аннотация

В соответствии с действующим стандартом учитель должен быть подготовлен к профессиональной деятельности. Профессиональная компетентность учителя математики повышается в том числе за счет овладения педагогом:

- ФГОС;
- Профстандартом «Педагог»;
- знаниями и умениями оценивания образовательных достижений учащихся;
- знаниями и умениями в экспертизе экзаменационных работ ОГЭ.

Программа составлена на основе методических материалов для предметных комиссий субъектов Российской Федерации Рособрнадзора по проверке выполнения зданий с развернутым ответом экзаменационных работ ОГЭ 2020 года (МАТЕМАТИКА).

Методические материалы включают описание экзаменационной работы 2020 г., научно-методические подходы к проверке и оцениванию выполнения заданий с развернутым ответом, примеры ответов учащихся с комментариями к оценке этих ответов, а также материалы для самостоятельной работы эксперта.

Программа предназначена для подготовки экспертов по оцениванию выполнения заданий с развернутым ответом, которые являются частью контрольных измерительных материалов (КИМ) для сдачи основного государственного экзамена (ОГЭ) по математике.

ОГЭ проводится в соответствии с Федеральным законом «Об образовании в Российской Федерации» от 29.12.2012 № 273-ФЗ и Порядком проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам основного общего образования, утверждённым приказом Минпросвещения России и Рособрнадзора от 07.11.2018 № 189/1513.

Содержание КИМ определяется на основе Федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования (приказ Минобрнауки России от 17.12.2010 № 1897) с учётом Примерной основной образовательной программы основного общего образования (одобрена решением Федерального учебно-методического объединения по общему образованию (протокол от 08.04.2015 № 1/15)).

Целевая аудитория: эксперты предметной комиссии по математике.

Цель: формирование и развитие профессиональной компетентности региональных специалистов (экспертов ОГЭ) в области проверки и оценки выполнения заданий с развернутым ответом экзаменационных работ ОГЭ по математике.

Планируемые результаты обучения:

Компетенция	- Способен осуществлять профессиональную деятельность в соответствии с нормативными правовыми актами в сфере образования и нормами профессиональной этики. - Способен осуществлять и оптимизировать профессиональную деятельность в соответствии с нормативными правовыми актами в сфере образования и нормами профессиональной этики.
	- Способен осуществлять контроль и оценку формирования результатов образования обучающихся, выявлять и корректировать трудности в обучении. -Способен разрабатывать программы мониторинга результатов образования обучающихся, разрабатывать и реализовывать программы преодоления трудностей в обучении

Знания	Умения	Практический опыт
Знать нормативно-правовые и программные материалы, раскрывающие содержательные, структурные и организационные особенности ОГЭ	Уметь грамотно организовать процесс проведения ОГЭ с опорой на обновленную нормативно-правовую базу в условиях ФГОС основного общего образования	Экспертиза экзаменационных работ обучающихся по математике
Знать современное состояние, тенденции и перспективы обновления содержания школьного образования	Уметь применять современные технологии оценки образовательных достижений обучающихся	
Знать процедуры проверки, оценки ответов на задания с развернутым ответом	Уметь применять процедуры проверки, оценки ответов выпускников на задания с развернутым ответом	

УЧЕБНЫЙ ПЛАН

№ п/п	Наименование разделов, модулей	Трудо-емкость	В том числе			Форма аттестации
			лекции	практ.	самост. работа	
1.	**Модуль 1. Нормативно-правовые основы работы предметной комиссии ОГЭ по математике**	2	2			Теоретический зачет
2.	**Модуль 2. Экспертиза экзаменационной работы по математике**	16	2	8	6	Зачет (итоговая практическая работа)
	Итого	**18**				

КАЛЕНДАРНЫЙ УЧЕБНЫЙ ГРАФИК

Форма обучения: очная
Сроки освоения: программа рассчитана на 18 учебных часа, в том числе практических занятий – 8 ч., лекций – 4 ч, самостоятельная работа – 6 часов.
Режим занятий: 4 часа в день

УЧЕБНО-ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН
(очная форма)

№ п/п	Наименование (разделов) модулей и тем	Трудоемкость	В том числе Очная форма (аудиторные занятия)		В том числе Заочная форма (внеаудиторные занятия)			Формы аттестации (промежу-точной, Итоговой)
			лекц.	**практ**	**лекц.**	**практ**	**самост работа**	
1.	**Нормативно-правовые основы работы предметной комиссии**	**2**	**2**					Теоретический зачет
1.1.	Нормативно-правовые основы работы предметной комиссии		1					
1.2	Структура и содержание КИМ ОГЭ по математике		1					
2.	**Технология проверки и оценки заданий с развернутым ответом**	**16**	**2**	**8**			**6**	
2.1	Критериальные подходы к проверке и оценке заданий с развернутым ответом	2	2					
2.2	Методика проверки и оценки заданий с развернутым ответом	10		4			6	
2.2.1.	Методика проверки и оценки задания с развернутым ответом: оценивание заданий 20,21			2			2	
2.2.2	Методика проверки и оценки задания с развернутым ответом: оценивание заданий 23,24			2			2	
2.2.3	Методика проверки и оценки задания с развернутым ответом: оценивание заданий 22,25						2	
2.3	Согласование подходов к оцениванию заданий с развернутым ответом	**2**		2				
2.4	Итоговый зачет	2		2				Зачет (итоговая практическая работа)
	ИТОГО	**18**						

СОДЕРЖАНИЕ ПРОГРАММ МОДУЛЕЙ

Модуль 1. «Нормативно-правовые основы работы предметной комиссии» (2 часа, из них лекции – 2 часа)

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Цель: развитие профессиональной компетентности в области анализа нормативно правовых и методических документов, регламентирующих проведение ОГЭ по предмету.

Планируемые результаты обучения: знание нормативных и методических документов, регламентирующих процедуру проведения ОГЭ, работу региональной предметной комиссии, знание иметь документов, регламентирующих процедуру проверки и оценки ответов на задания с развернутым ответом; умение работать с инструкциями, регламентирующими процедуру проверки и оценки заданий с развернутым ответом; умение анализировать спецификацию, кодификатор и структуру демонстрационного варианта КИМ по предмету.

СОДЕРЖАНИЕ ТЕМ ПРОГРАММЫ МОДУЛЯ

Тема 1. «Нормативно-правовые основы работы предметной комиссии»

*(*всего 1 час, из них лекции – 1 час).

Государственная итоговая аттестация в форме ОГЭ как часть общероссийской системы оценки качества образования. Роль независимой объективной оценки учебных достижений как основа государственного контроля качества образования.

Нормативно-правовые документы, обеспечивающие проведение ОГЭ:

- Федеральный закон РФ «Об образовании в Российской Федерации»,

- Приказ Минобрнауки России от 07.11.2018 №189/1513 «Об утверждении Порядка проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам основного и среднего общего образования, ФГОС основного и среднего общего образования»,

Письмо Рособрнадзора «О количестве сдаваемых предметов в IX классе».

Инструктивно-методические материалы Федеральной службы по надзору в сфере образования и науки, ФГБУ «Федеральный центр тестирования», определяющие основы деятельности региональной предметной комиссии. Стандартизированная процедура проверки и оценки заданий с развернутым ответом в рамках проведения ОГЭ: протокол проверки, методика назначения третьего эксперта.

Тема 2. «Структура и содержание КИМ ОГЭ по математике»

(всего 1 час, из них лекции –1 час)

Документы, определяющие структуру и содержание контрольных измерительных материалов по предмету: кодификатор элементов содержания и требований к уровню подготовки обучающихся, спецификация контрольных измерительных материалов, для проведения государственной итоговой аттестации за курс основной общеобразовательной школы.

Типология заданий по предмету, их место и назначение в структуре контрольно-измерительных материалов. Распределение заданий экзаменационной работы по уровням усвоения учебного содержания курса.

Типология основных элементов содержания и учебно-познавательной деятельности, проверяемых заданиями с развернутым ответом. Типология заданий с развернутым ответом, проверяющих выделенные элементы содержания и учебно-познавательной деятельности.

СОДЕРЖАНИЕ и ФОРМА АТТЕСТАЦИИ ПО ПРОГРАММЕ МОДУЛЯ

Формой аттестации по программе модуля является сдача теоретического зачета.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ МОДУЛЯ

Модуль считается выполненным при условии правильного выполнения 75% заданий.

Модуль 2. «Технология проверки и оценки заданий с развернутым ответом»
(16 часов, из них лекции – 2 часа, практическая работа – 8 часов, самостоятельная работа – 6 часов)

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Цель: развитие профессиональной компетентности специалистов в области проверки и оценки выполнения заданий с развернутым ответом экзаменационных работ ОГЭ по математике.

Планируемые результаты обучения: знать специфику оценивания заданий с развернутым ответом по математике, знать типологию заданий с развернутым ответом, критерии и виды шкал, используемых для оценки заданий с развернутым ответом; уметь объективно оценивать задания с развернутым ответом по математике.

СОДЕРЖАНИЕ ТЕМ

Тема 1. «Критериальные подходы к проверке и оценке заданий с развернутым ответом»

(всего 2 часа, из них лекции – 2 часа)

Методика оценивания ответов экзаменуемых на основе разработанных критериев с примерами характерных ответов и типичных ошибок в ОГЭ по математике. Подходы к решению нестандартных ситуаций.

Тема 2. «Методика проверки и оценки заданий с развернутым ответом»

(всего 10 часов, из них практические – 4 часа, самостоятельная работа – 6 часов)

Научно-методические подходы к проверке и оценке задания с развернутым ответом.

Методика проверки и оценки заданий 20-25. Практическое задание: оценить по критериям работы учащихся (задания 21-25). Разбор типичных ответов школьников, дифференциация ошибок в работах. Рекомендации по квалификации ошибок.

Тема 3. Согласование подходов к оцениванию заданий с развернутым ответом.

(всего 2 часа, из них практические – 2 часа)

Трудные случаи при оценивании экспертами работ. Знакомство экспертов с результатами проверки и перепроверки работ в предыдущие годы. Анализ допущенных при оценивании ошибок.

Выработка единых подходов к проверке и оценке заданий с развернутым ответом с учетом специфики предмета и критериев оценивания отдельных заданий и работы в целом.

Анализ согласованности по результатам самостоятельной работы по оценки экзаменационных работ.

Тема 4. Итоговая аттестация

(всего 2 часа, из них практическая работа– 2 часа)

Практическая работа:

Выполните варианты зачетных заданий для экспертов по оцениванию ответов выпускников на задания с развернутым ответом экзаменационных работ по математике.

Работы предлагаются из Методических материалов для предметных комиссий субъектов Российской Федерации по проверке выполнения заданий 20-25 с развернутым ответом экзаменационных работ ОГЭ 2020 года.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ МОДУЛЯ

Итоговый зачет считается выполненным при условии правильного выполнения 75% заданий.

ОРГАНИЗАЦИОННО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ

Наименование специализированных аудиторий, кабинетов, лабораторий	Вид занятий	Наименование оборудования, программного обеспечения
Аудитория	Лекции, практические занятия	Компьютер, мультимедийный проектор, экран, интерактивная доска

Информационно-методические обеспечение:

Список литературы
Основная

1. Федеральный закон от 29 декабря 2012 года №273 –ФЗ (ред.от 05.05.2014) «Об образовании в Российской Федерации» (с изм. И доп., вступ. В силу с 06.05.2014).
2. Приказ Минпросвещения России, Рособрнадзора № 189/1513 от 07.11.2018 «Об утверждении Порядка проведения итоговой аттестации по образовательным программам основного общего образования».
3. Ященко, И.В. ОГЭ 2021. Математика. 37 вариантов. Типовые варианты экзаменационных заданий от разработчиков ОГЭ / И.В. Ященко – М.: Издательство «Экзамен», 2020. – 318 с.
4. Ященко, И.В. ОГЭ 2021. Математика. 50 вариантов. Типовые варианты экзаменационных заданий от разработчиков ОГЭ / И.В. Ященко – М.: Издательство «Экзамен», 2020. – 412 с.

Дополнительная

1. Беспалько, В.П. Инструменты диагностики качества знаний учащихся / В.П. Беспалько // Школьные технологии. – 2006. – № 2. – С. 138-150.
2. Гузеев, В.В. Планирование результатов образования и образовательная технология / В.В. Гузеев. – Москва: Народное образование, 2000. – 240 с. Ефремова, Н.Ф. Тестовый контроль в образовании: учебное пособие для студентов, получающих образование по педагогическим направлениям и специальностям / Н.Ф. Ефремова. – Москва: Логос, 2007. – 368 с.
3. Загвязинский, В.И. Общая педагогика / В.И. Загвязинский. – Москва: Высшая школа, 2008. – 391с.
4. Кадневский, В.М. Генезис тестирования в истории отечественного образования / В.М. Кадневский. – Омск : Изд-во ОмГУ, 2007. – 335 с.
5. Кадневский, В.М. История тестов. Монография / В.М. Кадневский. – М.: Народное образование, 2004. – 464 с.
6. Лебедев, О.Е. Кому оценивать образовательные результаты? / О.Е. Лебедев// Народное образование. – 2004. – № 9. – С. 81-86.
7. Поташник, М.М. Управление качеством образования / М.М. Поташник. – М.: Педагогическое общество России, 2006. – 443 с.
8. Чошанов, М.А. Школьная оценка: старые проблемы и новые перспективы / М.А. Чошанов // Педагогика. – 2000. – № 10. – С. 95-102.

Интернет-ресурсы

1. Нормативно- правовые документы: Официальный сайт ФИПИ [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://fipi.ru/oge/normativno-pravovye-dokumenty
2. Государственная итоговая аттестация выпускников 9 классов: Официальный сайт Рособрнадзор [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://obrnadzor.gov.ru/ru/activity/main_directions/cert_9/
3. Федеральный законом «Об образовании в РФ» от 29.12.2012 № 273-ФЗ

4. Демонстрационный вариант контрольных измерительных материалов основного государственного экзамена 2020 года по русскому языку: Официальный сайт ФИПИ [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://fipi.ru/oge/demoversii-specifikacii-kodifikatory#!/tab/173801626-2
5. Спецификация контрольных измерительных материалов для проведенияв 2020 году основного государственного экзамена по русскому языку: Официальный сайт ФИПИ [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://fipi.ru/oge/demoversii-specifikacii-kodifikatory#!/tab/173801626-2
6. Кодификатор проверяемых требований к результатам освоения основной образовательной программы основного общего образования и элементов содержания для проведения основного государственного экзамена по русскому языку: Официальный сайт ФИПИ [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://fipi.ru/oge/demoversii-specifikacii-kodifikatory#!/tab/173801626-2
7. Цыбулько И. П., Александров В. Н., Александрова О. Зверева Е. Н., Степанова Л. С. Методические материалы для предметных комиссий субъектов Российской Федерации по проверке выполнения зданий с развернутым ответом экзаменационных работ ОГЭ 2020 года. РУССКИЙ ЯЗЫК: Официальный сайт ФИПИ [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://fipi.ru/oge/dlya-predmetnyh-komissiy-subektov-rf#!/tab/173940378-2

СОДЕРЖАНИЕ И ФОРМЫ ИТОГОВОЙ АТТЕСТАЦИИ ПРОГРАММЫ ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ

Контроль результатов обучения

(сводная таблица)

ПС	«Педагог (педагогическая деятельность в дошкольном, начальном общем, основном общем, среднем общем образовании) (воспитатель, учитель)»	
ОТФ	Педагогическая деятельность по проектированию и реализации образовательного процесса в образовательных организациях дошкольного, начального общего, основного общего, среднего общего образования	
ТФ	Общепедагогическая функция. Обучение.	
Трудовое действие	**Перечень модулей**	**Формы аттестации по модулю**
Объективная оценка знаний обучающихся на основе тестирования и других методов контроля в соответствии с реальными учебными возможностями детей	1. «Нормативно-правовые основы работы предметной комиссии» 2. «Технология проверки и оценки заданий с развернутым ответом»	Теоретический зачет Зачет

и/или

Компетенции		Перечень модулей	Формы аттестации по модулю
знания	**умения**		
Знать нормативно-правовые и программные материалы, раскрывающие содержательные, структурные и организационные	Уметь грамотно организовать процесс проведения ОГЭ с опорой на обновленную нормативно-правовую базу в условиях ФГОС	1. «Нормативно-правовые основы работы предметной комиссии» 2. «Технология	Теоретический зачет Зачет

особенности ОГЭ	основного общего образования	проверки и оценки заданий с развернутым ответом»	
Знать современное состояние, тенденции и перспективы обновления содержания школьного образования	Уметь применять современные технологии оценки образовательных достижений обучающихся		
Знать процедуры проверки, оценки ответов на задания с развернутым ответом	Уметь применять процедуры проверки, оценки ответов выпускников на задания с развернутым ответом		

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ИТОГОВОГО ЗАЧЕТА

Формой итоговой аттестации программы повышения квалификации является зачет в форме практической работы:

1. Оценить ответы выпускников на задания с развернутым ответом экзаменационных работ ОГЭ по математике.
2. Результаты занести в таблицу.

Номер работы	Задание 20	Задание 21	Задание 22	Задание 23	Задание 24	Задание 25

Приложения

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС К ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ПРОГРАММЕ ПОВЫШЕНИЯ КВАЛИФИКАЦИИ «Подготовка экспертов предметной комиссии ОГЭ по математике»

Модуль 1. «Нормативно-правовые основы работы предметной комиссии»

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

Примерные вопросы теоретического зачета

1. Назовите нормативные основы деятельности эксперта региональной предметной комиссии.
2. Перечислите задачи ОГЭ как инструмента итогового контроля знаний обучающихся.
3. Назовите основные нормативные документы, регламентирующие проведение ОГЭ.
4. Специфика стандартизированных форм контроля.
5. Какие документы определяют структуру и содержание КИМ по математике.
6. Какую роль играет развернутый ответ в КИМ ОГЭ?
7. Назовите принципы присвоения квалификационных категорий экспертам региональных комиссий.
8. Каковы подходы к решению нестандартных ситуаций при проверке работ с развернутым ответом?
9. Назовите права и обязанности эксперта предметной комиссии.
10. В чем особенности методики проверки заданий 20, 21, 22 (Алгебра)?
11. В чем особенности методики проверки заданий 23, 24, 25 (Геометрия)?
12. Назовите типичные затруднения, расхождения экспертов при проверке работ.

Модуль 2. «Технология проверки и оценки заданий с развернутым ответом»
Задания для итогового зачета

Критерии
Задание 20

20

Решите уравнение $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - 6 = 0$.

Решение.

Пусть $t = \frac{1}{x}$, тогда уравнение принимает вид:

$$t^2 - t - 6 = 0,$$

откуда $t = -2$ или $t = 3$.

Уравнение $\frac{1}{x} = -2$ имеет корень $-\frac{1}{2}$. Уравнение $\frac{1}{x} = 3$ имеет корень $\frac{1}{3}$.

Таким образом, решение исходного уравнения: $x = -\frac{1}{2}$ и $x = \frac{1}{3}$.

Ответ: $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$.

20

Решите неравенство $(x-8)^2 < \sqrt{3}(x-8)$.

Решение.

Преобразуем исходное неравенство:

$$(x-8)\left(x-8-\sqrt{3}\right) < 0,$$

откуда $8 < x < 8+\sqrt{3}$.

Ответ: $\left(8; 8+\sqrt{3}\right)$.

20

Решите уравнение $(x-1)^4 - 2(x-1)^2 - 3 = 0$.

Решение.

Пусть $t = (x-1)^2$, тогда уравнение принимает вид:

$$t^2 - 2t - 3 = 0,$$

откуда $t = -1$ или $t = 3$.

Уравнение $(x-1)^2 = -1$ не имеет корней.

Уравнение $(x-1)^2 = 3$ имеет корни $1-\sqrt{3}$ и $1+\sqrt{3}$.

Ответ: $1-\sqrt{3}$; $1+\sqrt{3}$.

20

Решите уравнение $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$.

Решение.

Преобразуем уравнение:

$$(x+2)\left(x^2-1\right) = 0,$$

откуда $x = -2$, $x = -1$ или $x = 1$.

Ответ: -2; -1; 1.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Обоснованно получен верный ответ
1	Решение доведено до конца, но допущена описка или ошибка вычислительного характера, с её учётом дальнейшие шаги выполнены верно
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

Задание 21

21 Два автомобиля одновременно отправляются в 240-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 20 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 1 ч раньше второго. Найдите скорость первого автомобиля.

Решение.

Пусть скорость первого автомобиля v км/ч, тогда скорость второго автомобиля $v-20$ км/ч. Получаем уравнение:

$$\frac{240}{v-20}-\frac{240}{v}=1;\ 240v-240v+4800=v^2-20v;\ v^2-20v-4800=0,$$

откуда $v=80$.

Ответ: 80 км/ч.

21 Первую половину пути автомобиль проехал со скоростью 36 км/ч, а вторую — со скоростью 99 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути.

Решение.

Пусть половина трассы составляет s километров. Тогда первую половину трассы автомобиль проехал за $\frac{s}{36}$ часа, а вторую — за $\frac{s}{99}$ часа. Значит, его средняя скорость в км/ч равна $\dfrac{2s}{\frac{s}{36}+\frac{s}{99}}=52{,}8$.

Ответ: 52,8 км/ч.

21 Моторная лодка прошла против течения реки 77 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 2 часа меньше, чем на путь против течения. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 4 км/ч.

Решение.

Пусть скорость моторной лодки в неподвижной воде равна v км/ч. Получаем уравнение:

$$\frac{77}{v-4}-\frac{77}{v+4}=2;\ 77v+308-77v+308=2v^2-32;\ v^2=324,\text{ откуда } v=18.$$

Ответ: 18 км/ч.

21 Два автомобиля одновременно отправляются в 420-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 24 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 2 ч раньше второго. Найдите скорость первого автомобиля.

Решение.

Пусть скорость первого автомобиля v км/ч, тогда скорость второго автомобиля $v-24$ км/ч. Получаем уравнение:

$$\frac{420}{v-24}-\frac{420}{v}=2;\ 420v-420v+10080=2v^2-48v;\ v^2-24v-5040=0,\text{ откуда } v=84.$$

Ответ: 84 км/ч.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения задачи верный, получен верный ответ
1	Ход решения правильный, все его шаги присутствуют, но допущена ошибка или описка вычислительного характера
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

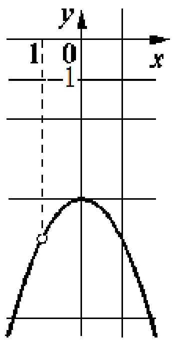
Задание 22

22

Постройте график функции $y=\dfrac{(x^2+4)(x+1)}{-1-x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y=kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение.

Преобразуем выражение: $\dfrac{(x^2+4)(x+1)}{-1-x}=-x^2-4$ при условии, что $x\neq-1$. Построим график (см. рисунок).



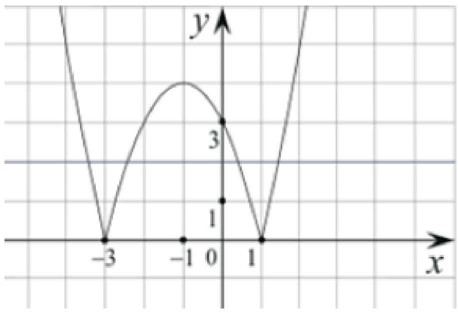
Прямая $y=kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку, если она проходит через точку $(-1;-5)$ или если уравнение $-x^2-4=kx$ имеет один корень. Дискриминант уравнения $x^2+kx+4=0$ равен k^2-16, и он должен быть равен нулю. Получаем, что $k=5$, $k=-4$ и $k=4$.

Ответ: $k=5$, $k=-4$, $k=4$.

22

Постройте график функции $y=\left|x^2+2x-3\right|$. Какое наибольшее число общих точек график данной функции может иметь с прямой, параллельной оси абсцисс?

Решение.



Построим график функции $y=x^2+2x-3$ при $x<-3$ и $x>1$ и график функции $y=-x^2-2x+3$ при $-3\le x\le 1$.

График данной функции может иметь с прямой, параллельной оси абсцисс, 0, 2, 3 или 4 общие точки.

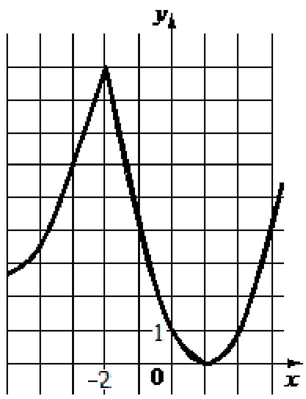
Ответ: 4.

22

Постройте график функции

$$y=\begin{cases} x^2-2x+1, & \text{если } x\ge-2,\\ -\dfrac{18}{x}, & \text{если } x<-2,\end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком одну или две общие точки.



Решение.

Построим график функции $y=-\dfrac{18}{x}$ при $x<-2$ и график функции $y=x^2-2x+1$ при $x\ge-2$.

Прямая $y=m$ имеет с графиком одну или две общие точки при $m=0$ и при $m\ge 9$.

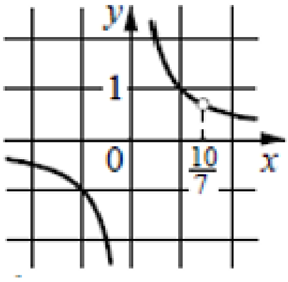
Ответ: 0; $[9;+\infty)$.

22

Постройте график функции $y=\dfrac{7x-10}{7x^2-10x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y=kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Решение.

Преобразуем выражение: $\dfrac{7x-10}{7x^2-10x}=\dfrac{1}{x}$ при условии, что $x\neq\dfrac{10}{7}$.



Прямая $y=kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку, если она проходит через точку $\left(\dfrac{10}{7};\dfrac{7}{10}\right)$. Получаем, что $k=\dfrac{49}{100}$.

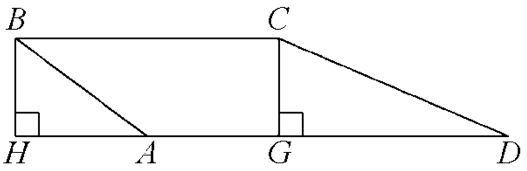
Ответ: $k=\dfrac{49}{100}$.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	График построен верно, верно найдены искомые значения параметра
1	График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

Задание 23

23 Найдите боковую сторону AB трапеции $ABCD$, если углы ABC и BCD равны соответственно $30°$ и $135°$, а $CD = 17$.

Решение.



Проведём перпендикуляры $BH = CG$ к прямой AD.

В прямоугольном треугольнике CDG угол GCD равен $45°$, следовательно, $CG = CD \cdot \cos 45° = \frac{17\sqrt{2}}{2}$.

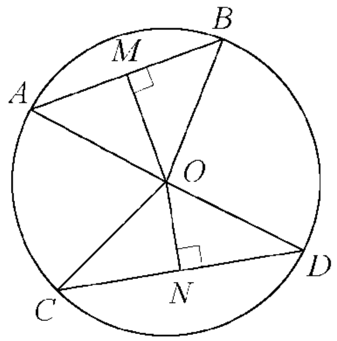
В прямоугольном треугольнике ABH катет $BH = CG = \frac{17\sqrt{2}}{2}$, а угол ABH равен $60°$. Значит, $AB = \frac{BH}{\cos 60°} = \frac{17\sqrt{2}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 17\sqrt{2}$.

Ответ: $17\sqrt{2}$.

23 Отрезки AB и CD являются хордами окружности. Найдите расстояние от центра окружности до хорды CD, если $AB = 14$, $CD = 48$ а расстояние от центра окружности до хорд AB равно 24.

Решение.

Пусть OM и ON — перпендикуляры к хордам AB и CD соответственно. Треугольники AOB и COD равнобедренные, значит, $AM = MB$ и $CN = ND$.



Тогда в прямоугольном треугольнике MOB имеем:

$$OB = \sqrt{OM^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = 25.$$

В прямоугольном треугольнике CON гипотенуза $CO = OB = 25$, откуда $ON = \sqrt{OC^2 - \left(\frac{CD}{2}\right)^2} = 7$. Получаем, что расстояние от центра окружности до хорд CD равно 7.

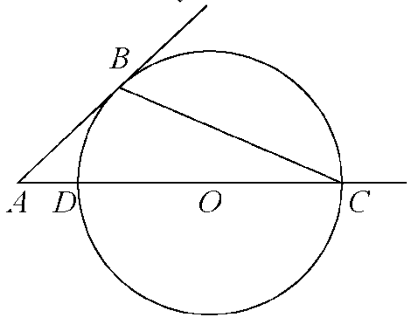
Ответ: 7.

23

Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B. Найдите AC, если $AB = 8$, диаметр окружности равен 3,6.

Решение.

Пусть $AC = x$. Тогда по свойству касательной и секущей, проведённых из одной точки к окружности, получаем:



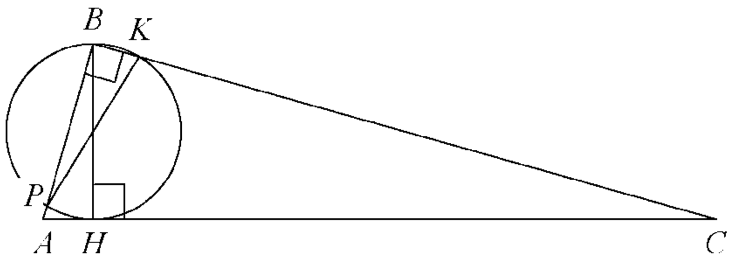
$$AB^2 = AC(AC - CD);\ 64 = x(x - 3{,}6), \text{ откуда } x = 10.$$

Ответ: 10.

23

Точка H является основанием высоты BH, проведённой из вершины прямого угла B прямоугольного треугольника ABC. Окружность с диаметром BH пересекает стороны AB и CB в точках P и K соответственно. Найдите BH, если $PK = 11$.

Решение.



Угол PBK опирается на дугу PK и равен $90°$, а значит, PK — диаметр, откуда получаем, что $BH = PK = 11$.

Ответ: 11.

Баллы	Критерии оценки выполнения задания
2	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ
1	Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, но даны неполные объяснения или допущена одна вычислительная ошибка
0	Другие случаи, не соответствующие указанным критериям
2	*Максимальный балл*

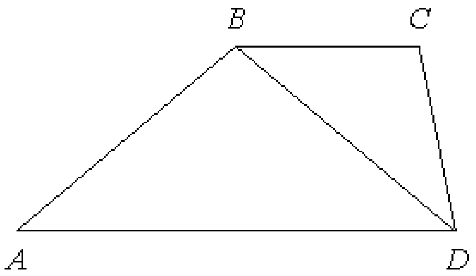
Задание 24

24

Основания BC и AD трапеции $ABCD$ равны соответственно 3 и 12, $BD = 6$. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны.

Доказательство.

В треугольниках ADB и DBC углы ADB и DBC равны как накрест лежащие, кроме того, $\frac{AD}{DB} = \frac{DB}{BC} = 2$. Поэтому треугольники CBD и BDA подобны по двум пропорциональным сторонам и углу между ними.

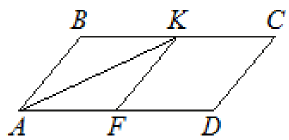


24

Сторона BC параллелограмма $ABCD$ вдвое больше стороны AB. Точка K — середина стороны BC. Докажите, что AK — биссектриса угла BAD.

Доказательство.

Проведём прямую KF параллельно стороне AB (см. рисунок). Поскольку $BK = KC = AB$, параллелограмм $ABKF$ является ромбом, поэтому диагональ AK ромба $ABKF$ делит угол BAF пополам. Значит, AK — биссектриса угла BAD.

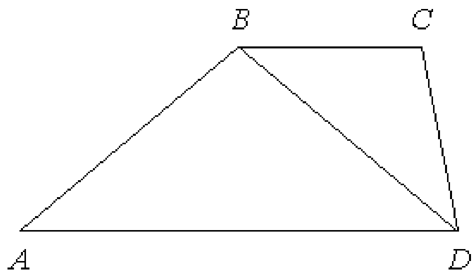


24

Основания BC и AD трапеции $ABCD$ равны соответственно 9 и 36, $BD = 18$. Докажите, что треугольники CBD и BDA подобны.

Доказательство.

В треугольниках ADB и DBC углы ADB и DBC равны как накрест лежащие, кроме того, $\frac{AD}{DB} = \frac{DB}{BC} = 2$. Поэтому треугольники CBD и BDA подобны по двум пропорциональным сторонам и углу между ними.

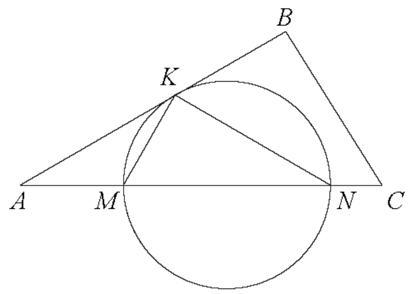


Баллы	Содержание критерия
2	Доказательство верное, все шаги обоснованы
1	Доказательство в целом верное, но содержит неточности
0	Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше
2	*Максимальный балл*

Задание 25

25 Точки M и N лежат на стороне AC треугольника ABC на расстояниях соответственно 4 и 15 от вершины A. Найдите радиус окружности, проходящей через точки M и N и касающейся луча AB, если $\cos\angle BAC = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

Решение.



Пусть K — точка касания окружности с лучом AB (см. рис.). По теореме о касательной и секущей $AK^2 = AM \cdot AN = 4 \cdot 15 = 60$.

По теореме косинусов

$$KM^2 = AM^2 + AK^2 - 2AM \cdot AK \cos\angle BAC =$$

$$= 16 + 60 - 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{60} \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = 16$$

Значит, $KM = 4$. Треугольник AKM равнобедренный, поэтому $\angle AKM = \angle KAM = \angle BAC$.

По теореме об угле между касательной и хордой $\angle KNM = \angle AKM = \angle BAC$.

Пусть R — радиус окружности, проходящей через точки M, N и K. По теореме синусов $R = \frac{KM}{2\sin\angle KNM} = \frac{4}{2\sqrt{1-\frac{15}{16}}} = 8$.

Ответ: 8.

25 Биссектрисы углов A и B параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке K. Найдите площадь параллелограмма, если $BC = 12$, а расстояние от точки K до стороны AB равно 9.

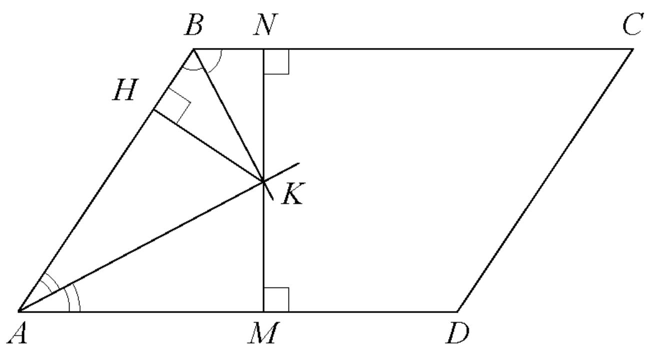
Решение.

Пусть KH, KN и KM — перпендикуляры, опущенные из точки K к сторонам AB, BC и AD соответственно (см. рис.). Тогда по свойству биссектрис $KM = KH = KN = 9$.

Кроме того, точки M, K и N лежат на одной прямой и $MN = MK + KN = 18$ — высота параллелограмма $ABCD$.

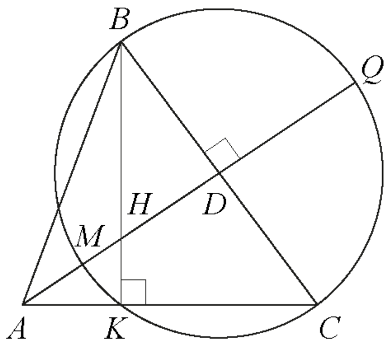
По формуле площади параллелограмма находим $S_{ABCD} = BC \cdot MN = 12 \cdot 18 = 216$.

Ответ: 216.



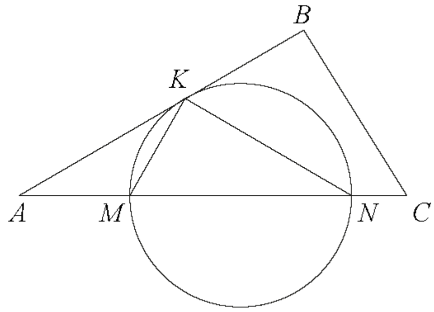
25 На стороне BC остроугольного треугольника ABC ($AB \neq AC$) как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M, $AD = 9$, $MD = 3$, H — точка пересечения высот треугольника ABC. Найдите AH.

Решение.
Пусть окружность с диаметром BC вторично пересекается с прямой AC в точке K (см. рис.). Поскольку BK — высота остроугольного треугольника ABC, точка K лежит на стороне AC.



Продолжим высоту AD за точку D до пересечения с окружностью в точке Q. Тогда $DQ = MD = 3$.
По следствию из теоремы о касательной и секущей
$AK \cdot AC = AM \cdot AQ = \left(AD - MD\right) \cdot (AD + DQ) = $
$= 6 \cdot 12 = 72.$
Из подобия прямоугольных треугольников AKH и ADC следует, что
$\frac{AK}{AH} = \frac{AD}{AC}$, откуда $AK \cdot AC = AD \cdot AH = 9AH$.
Значит, $9AH = 72$. Следовательно, $AH = \mathbf{8}$.
Ответ: 8.

25 Точки M и N лежат на стороне AC треугольника ABC на расстояниях соответственно 16 и 39 от вершины A. Найдите радиус окружности, проходящей через точки M и N и касающейся луча AB, если $\cos\angle BAC = \frac{\sqrt{39}}{8}$.



Решение. Пусть K — точка касания окружности с лучом AB (см. рис.). По теореме о касательной и секущей
$AK^2 = AM \cdot AN = 16 \cdot 39 = 624$.
По теореме косинусов
$KM^2 = AM^2 + AK^2 - 2AM \cdot AK \cos\angle BAC = $
$= 256 + 624 - 2 \cdot 6 \cdot \sqrt{624} \cdot \frac{\sqrt{39}}{8} = 256$
Значит, $KM = 16$. Треугольник AKM равнобедренный, поэтому $\angle AKM = \angle KAM = \angle BAC$.
По теореме об угле между касательной и хордой $\angle KNM = \angle AKM = \angle BAC$.
Пусть R — радиус окружности, проходящей через точки M, N и K.
По теореме синусов $R = \frac{KM}{2\sin\angle KNM} = \frac{16}{2\sqrt{1 - \frac{39}{64}}} = 12{,}8$.

Работа 1

$$\frac{240(x+20)-240\cdot(x)-1(x+20)\cdot x}{x(x+20)}=0,$$

$$\frac{240x+4800-240x-x^2-20x}{x(x+20)}=0,$$

$-x^2-20x+4800=0,$

$x^2+20x-4800=0$

$D=400-4\cdot1\cdot(-4800)=400+19200=19600=140^2$

$x_{1,2}=\frac{-20\pm140}{2}$ $\frac{120}{2}=60$; $\frac{-160}{2}=-80$ – не удовлетворяет условию задачи

Значит, скорость второго автомобиля равна 60 км/ч. Найдём скорость первого автомобиля

$x+20=60+20=80$ (км/ч)

Ответ: 80 км/ч

23) $y=\frac{(x^2+4)(x+1)}{-1-x}$; ОДЗ: $x\neq-1$

$$\frac{(x^2+4)(x+1)}{-1-x}=\frac{(x^2+4)(x+1)}{-1(x+1)}=-x^2-4$$

$y=-x^2-4$ – функция квадратичная, график парабола

x	-2	-1	0	1	2
y	-8	-5	-4	-5	-8

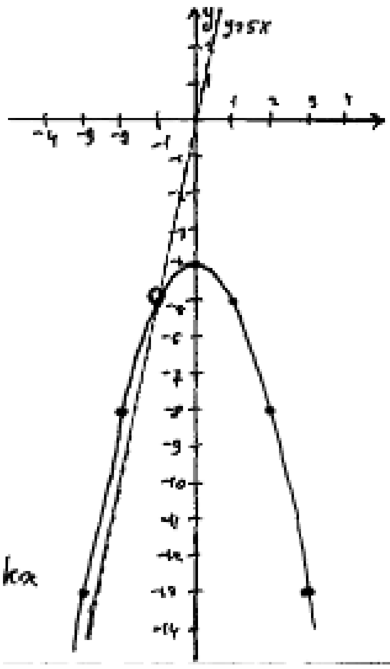


График ф-ции $y=\frac{(x^2+4)(x+1)}{-1-x}$ имеет с графиком ф-ции $y=kx$ одну общую точку при $k=5$

21) $\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}-6=0 \Rightarrow \begin{cases}\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}-6=0\\ x\neq 0\end{cases}$

$\begin{cases}\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}-6=0\\ x\neq 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\frac{1-x-6x^2}{x^2}=0\\ x\neq 0\end{cases} \Rightarrow 1-x-6x^2=0 \Rightarrow 6x^2+x-1=0$

$6x^2+x-1=0$

$D=1^2-4\cdot 6\cdot(-1)=1+24=25=5^2$

$x_{1,2}=\frac{-1\pm 5}{6\cdot 2}$ $\frac{-6}{12}=-0,5$; $\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$

Ответ: $x_1=-0,5$; $x_2=\frac{1}{3}$

22) Пусть x км/ч – скорость второго автомобиля, а $(x+20)$ км/ч – скорость первого автомобиля. Зная, что оба автомобиля преодолели 240 км, составим таблицу и выразим время.

	v, км/ч	t, ч	S, км
1 автомобиль	$x+20$	$\frac{240}{x+20}$	240
2 автомобиль	x	$\frac{240}{x}$	240

Зная, что первый автомобиль закончил свой маршрут на 1 час раньше, чем второй, составим и решим уравнение

$\frac{240}{x}-\frac{240}{x+20}=1$

$\begin{cases}\frac{240}{x}-\frac{240}{x+20}=1\\ x\neq 0\\ x\neq -20\end{cases}$

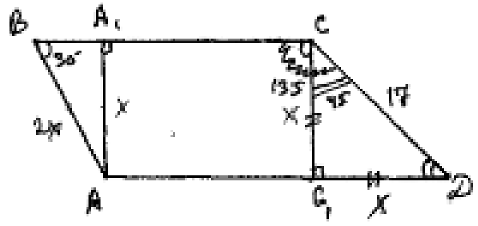
24) Дано: $ABCD$ – трапеция

$BC \parallel AD$; AB и CD – боковые стороны

$\angle ABC = 30^\circ$; $\angle BCD = 135^\circ$

$CD = 17$

Найти: AB



Решение:

1) $\angle ABC = 30^\circ$; $AA_1 \perp BC \Rightarrow AA_1 = \frac{1}{2}AB$ (в прямоуг. треуг. катет напротив угла в 30° равен половине гипотенузы)

$AA_1 = x$; $AB = 2x$

2) $CC_1 \perp AD$; $AA_1 = CC_1 = x$ ($ABCD$ – трапеция)

3) $\angle BCD = 135^\circ \Rightarrow \angle C_1CD = 135^\circ - \angle BCC_1 = 135^\circ - 90^\circ = 45^\circ$

4) $\angle C_1DC = 180^\circ - \angle CC_1D - \angle C_1CD = 180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$ (сумма углов треуг. – 180°)

5) $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{C_1D}{CD} = \frac{x}{17} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{x}{17} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{2x}{34} = \frac{17\sqrt{2}}{34} \Rightarrow 2x = 17\sqrt{2}$

6) $AB = 2AA_1 = 2C_1D = 2x = 17\sqrt{2}$

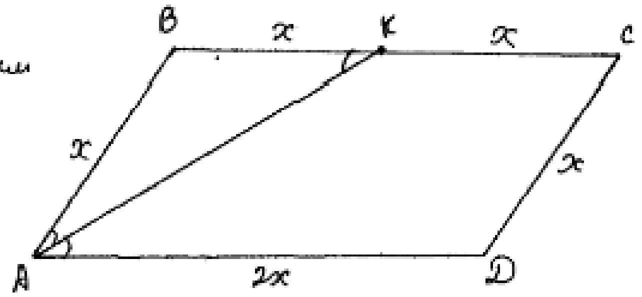
Ответ: $AB = 17\sqrt{2}$

25) Дано: $ABCD$ – параллелограмм

$AB = \frac{1}{2}BC$; K – середина BC

$BK = KC$

Доказать: AK – биссектриса $\angle BAD$



▲ $ABCD$ – параллелограмм $\Rightarrow BC \parallel AD$

$\angle BKA = \angle KAD$ как накрест лежащие углы при параллельных прямых BC и AD и секущей AK

Пусть $AB = x$, тогда $BC = 2x$, $BK = KC = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\cdot 2x = x$

$\triangle ABK$ – равнобедренный ($AB = BK$) $\Rightarrow \angle BAK = \angle BKA$

$\angle BAK = \angle BKA$ и $\angle BKA = \angle KAD \Rightarrow \angle BAK = \angle KAD \Rightarrow AK$ – биссектриса $\angle BAD$ ■

Работа 2

21. $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - 6 = 0$

$$\frac{1 - x - 6x^2}{x^2} = 0$$

$\begin{cases} x^2 \neq 0 \\ 6x^2 + x - 1 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \neq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = -0{,}5 \\ x = \frac{1}{3} \end{array}\right. \end{cases}$

Ответ: $-0{,}5$; $\frac{1}{3}$.

22. Пусть $\upsilon_1 = x$ км/ч

	υ, км/ч	t, ч	S, км
1	x	$\frac{240}{x}$	240
2	$x-20$	$\frac{240}{x-20}$	240

на 1

Значит, $\frac{240}{x-20} - \frac{240}{x} - 1 = 0$

$$\frac{240x - 240x + 4800 - x^2 + 20x}{x(x-20)} = 0$$

$\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 20 \\ x^2 - 20x - 4800 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 20 \\ \left[\begin{array}{l} x = 80 \\ x = -60 \end{array}\right. \end{cases}$

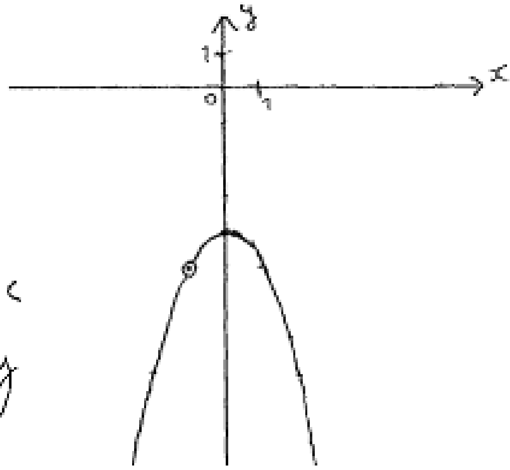
$\upsilon_1 = -60$ км/ч – не удовл по усл задачи $\Rightarrow \upsilon_1 = 80$ км/ч

Ответ: 80 км/ч.

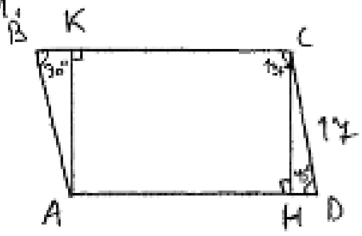
23. $y = \frac{(x^2+4)(x+1)}{-1-x} = -\frac{(x^2+4)(x+1)}{(x+1)}$

$\begin{cases} y = -x^2 - 4 \\ x \neq -1 \end{cases}$

при $k = 5$, прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку



24.



Дано: трап. $ABCD$ ($BC \parallel AD$); $\angle B = 30°$; $\angle C = 135°$;
$CD = 17$ ед

Найти: AB - ?

$\angle C = 135° \Rightarrow \angle D = 45°$ (т.к. вн. одностор. при $AD \parallel BC$ и сек. CD)

Д/п: $CH \perp AD = H$, $AK \perp BC = K$ | - выс. трап. $ABCD \Rightarrow AK = CH$

$\triangle CHD$ ($\angle H = 90°$): $\angle D = 45° \Rightarrow \angle C = 45° \Rightarrow \triangle CHD$ - р/б $\Rightarrow CH = HD = x$

$CH^2 = CD^2 - HD^2$ (по т. Пифагора)

$x^2 = 17^2 - x^2$

$2x^2 = 17^2$

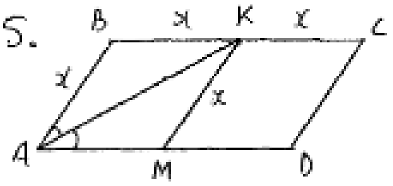
$x^2 = 144{,}5$ $\quad x = \pm 8{,}5\sqrt{2}$

$CH = -8{,}5\sqrt{2}$ ед - не удовл. по усл. задачи $\Rightarrow CH = 8{,}5\sqrt{2}$ ед $= AK$

$\triangle AKB$ ($\angle K = 90°$): $\angle B = 30° \Rightarrow AB = 2AK = 17\sqrt{2}$ ед

Ответ: $17\sqrt{2}$ ед.

25.



Дано: $ABCD$ - п/м; $BC = 2AB$; K - сер. BC

Д-ть: AK - бис $\angle A$

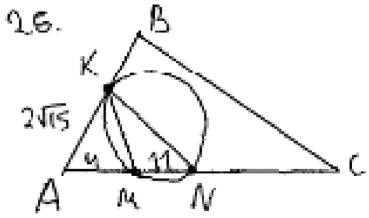
K - сер $BC \Rightarrow BK = KC = \frac{1}{2} BC = AB$

Д/п: $KM \parallel AB$ ($M \in AD$) $\Rightarrow$ п/м $ABKM$; $KM = AB$

$AB = BK = KM \Rightarrow ABKM$ - ромб

AK - диаг в $ABKM$, $ABKM$ - ромб | $\Rightarrow AK$ - бис $\angle A$

26.



Дано: $\triangle ABC$; $M \in AC$, $N \in AC$; $AM = 4$ ед; $AN = 15$ ед

$\cos A = \frac{\sqrt{15}}{4}$; $\omega(O; R)$ кас. AB в K; $M \in \omega(O; R)$

$N \in \omega(O; R)$

Н-ти: R - ?

$AM = 4$ ед; $AN = 15$ ед $\Rightarrow MN = 15 - 4 = 11$ ед

$AK^2 = AM \cdot AN$ (по теореме о кас и сек.)

$AK = \sqrt{4 \cdot 15} = 2\sqrt{15}$ ед.

$\triangle AKM$: $KM^2 = AK^2 + AM^2 - 2AK \cdot AM \cdot \cos A$ (по т. cos)

$KM = \sqrt{60 + 16 - 16\sqrt{15} \cdot 0{,}25\sqrt{15}} = \sqrt{16} = 4$ ед

$\triangle AKN$: $KN^2 = AK^2 + AN^2 - 2AK \cdot AN \cdot \cos A$ (по т. cos)

$KN = \sqrt{60 + 15 \cdot 15 - 30 \cdot 2\sqrt{15} \cdot 0{,}25\sqrt{15}} = 2\sqrt{15}$ ед

$AK = KN \Rightarrow \triangle AKN$ - р/б $\Rightarrow \angle A = \angle N$

$\sin^2 - \cos^2 = 1 \Rightarrow \sin N = \sqrt{1 - \frac{15}{16}} = 0{,}25$

$\frac{KM}{\sin N} = 2R \Rightarrow R = \frac{KM}{2\sin N} = \frac{4}{2 \cdot 0{,}25} = 8$ ед

(т. sin)

Ответ: 8 ед.

Работа 3

21. Решите уравнение $(x-1)^4-2(x-1)^2-3=0$

Пусть $(x-1)^2=t$,

тогда

$$t^2-2t-3=0$$

$$D=4+12=16=4^2$$

$$t_{1,2}=\frac{2\pm4}{2} \qquad t_1=3 \qquad t_2=-1$$

$$(x-1)^2\neq-1 \qquad (x-1)^2=3$$

$$(x-1)\cdot(x-1)=3$$

$$x^2-x-x+1=3$$

$$x^2-2x-2=0$$

$$D=4+8=12$$

$$x_{1,2}=\frac{2\pm2\sqrt{3}}{2} \qquad x_{1,2}=1\pm\sqrt{3}$$

Ответ: $x_{1,2}=1\pm\sqrt{3}$

22 Дано:

$AB=77$ км

$t_1=x+2$

$t_2=x$

$V_{т.р}=4$ км/ч

Найти: $V_л$

Решение:

$S=Vt$

$$\begin{cases}(x+2)(V_л-4)=77 & ② \\ x(V_л+4)=77 & ①\end{cases}$$

① $x=\dfrac{77}{V_л+4}$ ② $\left(\dfrac{77}{V_л+4}+2\right)(V_л-4)=77$

$$\left(\frac{77+2V_л+8}{V_л+4}\right)(V_л-4)=77$$

$$(77+2V_л+8)(V_л-4)=77V_л+308 \rightarrow (85+2V_л)(V_л-4)=77V_л+308$$

$$\underline{85V_л}-340+2V_л^2-\underline{8V_л}=\underline{77V_л}+308$$

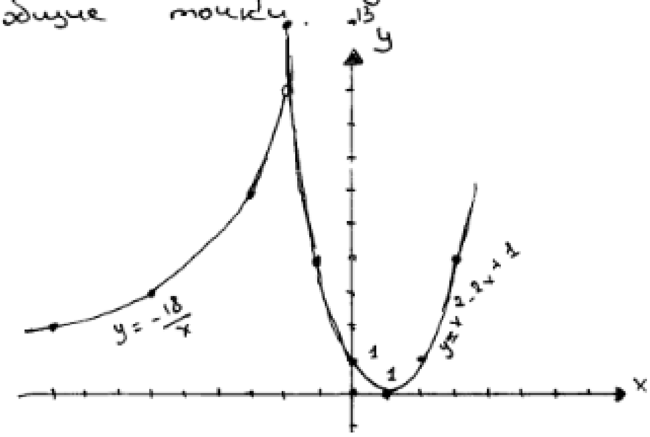
$$2V_л^2=648$$

$V_л^2=324$ $V_л=18$ км/ч Ответ $V_л=18$ км/ч Смотри на

23. Постройте график функции

$$y=\begin{cases} x^2-2x+1 & \text{при } x \geqslant -2 \\ -\dfrac{18}{x} & \text{при } x < -2 \end{cases}$$

и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком одну или две общие точки.

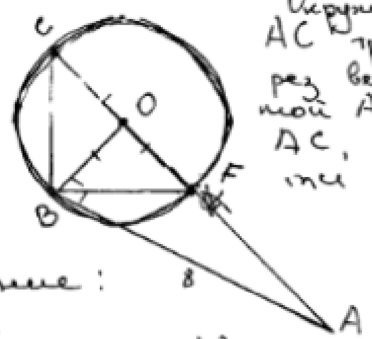


$m \in \{0\} \cup [9; +\infty)$

Ответ: $m = \{0\} \cup [9; +\infty)$

24. Дано:
$d = 3,6$ ~~= CA~~
$AB = 8$

Найти: AC



Окружность с центром на стороне AC треугольника ABC проходит через вершину C и касается прямой AB в точке B. Найдите AC, если диаметр окружности равен $3,6$, а $AB = 8$.

Решение:

$\angle OBA = 90^\circ$ (так как AB касательная)

$r = OB = \dfrac{d}{2} = \dfrac{3,6}{2} = 1,8$ $\quad \Delta OBA$ – прямоуг.

$OA^2 = OB^2 + BA^2$ (по Пифагору)

$OA^2 = 3,24 + 64$

$OA^2 = 67,24$

$OA = 8,2$ $\quad AC = OA + OC$ $\quad AC = 8,2 + 1,8 = 10$

Ответ: $AC = 10$

25 ~~На~~ Сторона BC параллелограмма ABCD вдвое больше стороны AB. Точка K – середина стороны BC. Докажите, что AK – биссектриса угла BAD.

Дано: AB = BK = KC
ABCD – параллелограмм
Доказать: AK – биссектр.

Смотри на 3 бланке (2 лист)

---

25 Доказательство:

AB = BK (по условию), следовательно △ABK – равнобедр.

∠BAK = ∠BKA

ABCD – параллелограмм (по условию), значит

BC ∥ AD

∠BKA = ∠KAD (так как BC ∥ AD)

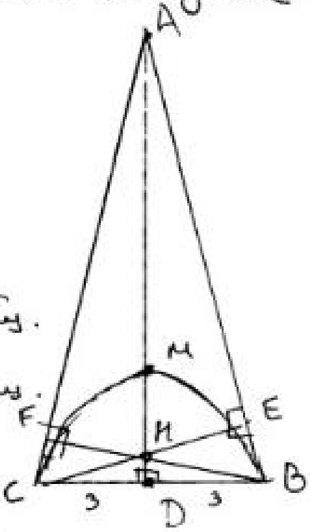
∠BKA = ∠BAK = ∠KAD

∠BAK = ∠KAD AK – биссектриса ЧТД

26. На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M, AD = 9, MD = 3, H – точка пересечения высот треугольника ABC. Найдите AH.

Дано:
AD = 9
MD = 3

Найти. AH



Решение

△CAD ∾ △CFB (по 3 углам) ∠C-общ.

△CFB ∾ △BHD (по 3 углам) ∠B-общ.

следовательно △CAD ∾ △BHD

CD = BD = MD = 3 (так как радиусы)

$K = \frac{9}{3} = 3$ $3HD = CD$ $HD = \frac{CD}{3} = \frac{3}{3} = 1$

$AH = AD - HD = 9 - 1 = 8$ Ответ: AH = 8

Работа 4

№21

Пусть $(x-1)^2$ будет t, тогда

$t^2 - 2t - 3 = 0$

$t = \left[\begin{array}{l} -1 \\ 3 \end{array} \right.$ (по т. Виета)

Замена:

$(x-1)^2 = -1$ или $(x-1)^2 = 3$

$x = \varnothing$ $\quad x - 1 = \sqrt{3}$

$x = 1 + \sqrt{3}$

Ответ: $1 + \sqrt{3}$

№22

$\begin{cases} (v-4)\cdot t = 77 \\ (v+4)(t-2) = 77 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{77}{v-4} \\ vt + 4t - 2v - 8 = 77 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} t = \dfrac{77}{v-4} \\ t = \dfrac{2v+85}{v+4} \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{77}{v-4} = \dfrac{2v+85}{v+4} \Leftrightarrow$

$77v + 4\cdot 77 = 2v^2 + \cancel{85v} - \cancel{8v} - 4\cdot 85$

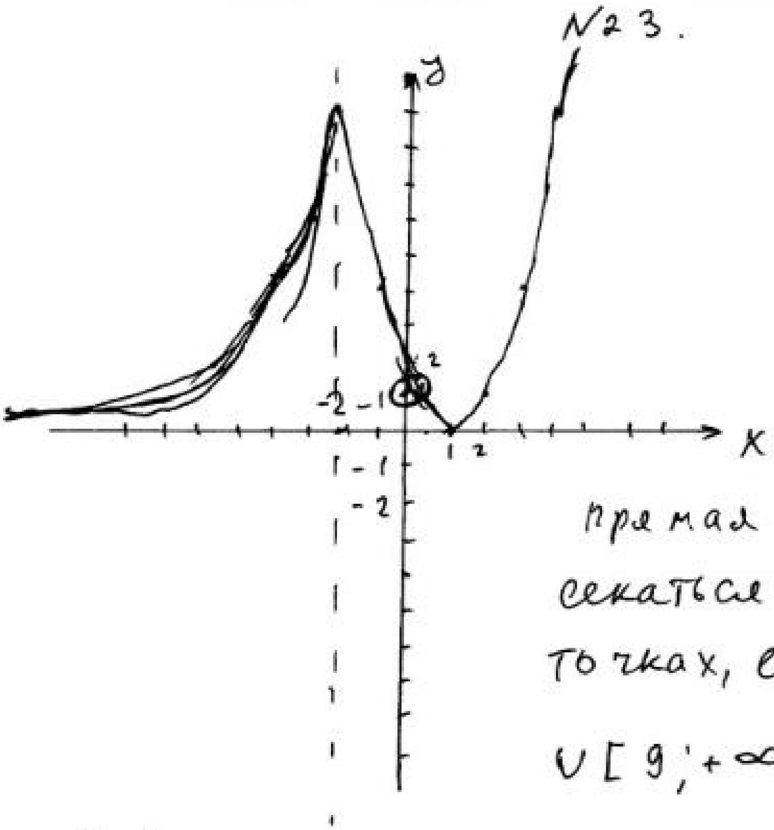
$2v^2 - 648 = 0$

$v^2 = 324$

$v = \left[\begin{array}{l} 18 \\ -18 \text{ (не удвл).} \end{array} \right.$

Ответ: 18 $\left(\frac{км}{ч}\right)$.

№ 23.



$$y = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & \text{при } x \geq -2 \\ -\dfrac{18}{x} & \text{при } x < -2. \end{cases}$$

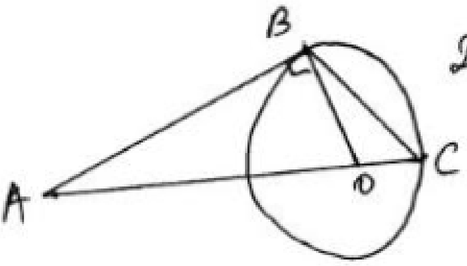
$y = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$

$x \neq 0$

Прямая $y = m$ будет пересекаться в одной или в двух точках, если $m \in \{0; 1\} \cup$
$\cup [9; +\infty)$.

Ответ: $y = m$; $m \in \{0; 1\} \cup [9; +\infty)$.

№ 24.



Дано: O – центр Окружности !!!
$AB = 8$
$2BO = 3,6$.
Найти: AC.

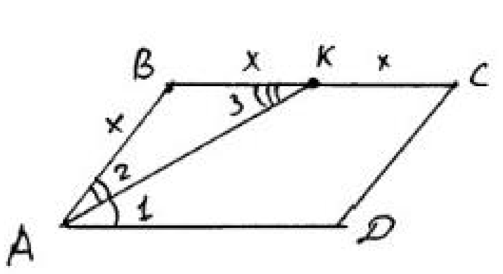
Решение:

$BO = \dfrac{3,6}{2} = 1,8$

$AO = \sqrt{64 + 3,24} = \sqrt{8^2 + 1,8^2} = \sqrt{67,24} = 8,2$.

$AC = AO + OC = 8,2 + 1,8 = 10$

Ответ: 10.



№25

Дано: $BC = 2AB$

$ABCD$ - параллелограмм.

K - середина BC

Док-ть: AK - биссектриса $\angle BAD$

Док-во:

$BK \parallel AD \Rightarrow AK$ - секущая $\Rightarrow \angle 1 = \angle 3$.

$AB = BK \Rightarrow \triangle ABK$ - равнобедренный $\Rightarrow$

$\angle 2 = \angle 3 \Rightarrow \angle 1 = \angle 2 \Rightarrow AK$ - биссектриса угла BAD. Ч.Т.Д.

Работа 5

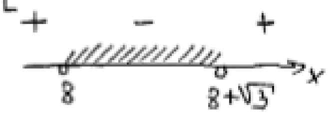
(21) $(x-8)^2<\sqrt{3}(x-8)$

Приравняем к нулю, чтобы найти корни:

$(x-8)^2-\sqrt{3}(x-8)=0$

$(x-8)\left((x-8)-\sqrt{3}\right)=0$

$$\left[\begin{array}{l} x-8=0 \\ x=8 \\ x-8-\sqrt{3}=0 \\ x=8+\sqrt{3} \end{array}\right.$$



$, \Rightarrow$

$x\in\left(8;\,8+\sqrt{3}\right).$

Ответ: $\left(8;\,8+\sqrt{3}\right)$.

(22) Пусть половина пути – S, тогда весь путь – 2S.

	S	v	t
I половин.	S км	36 км/ч	$\frac{S}{36}$
II половин.	S км	99 км/ч	$\frac{S}{99}$

Найти: $v_{ср.}$

$$v_{ср.}=\frac{S_{общ.}}{t_{общ.}}$$

$$v_{ср.}=\frac{2S}{\frac{S}{36}+\frac{S}{99}}$$

→ обратная сторона см. продолжение

$$v_{ср}=\frac{2S}{\frac{99S+36S}{36\cdot 99}}=\frac{2S\cdot 36\cdot 99^{11}}{135S}=\frac{2\cdot 12\cdot 11}{5}=52{,}8 \quad (км/ч)$$

Ответ: 52,8 км/ч.

23 $y = |x^2+2x-3|$

[redacted]

при $x \geq 0$

$y = x^2+2x-3$

Графиком является парабола

$a = 1 > 0$, ветви ↑

в.п: $x = \frac{-b}{2a} = -1;$

$y(-1) = -4.$

в.п: $(-1;-4)$

x	1	2	3	4	0
y	0	5	12	21	-3

при $x < 0$

$y = -x^2-2x-3$

Графиком является парабола

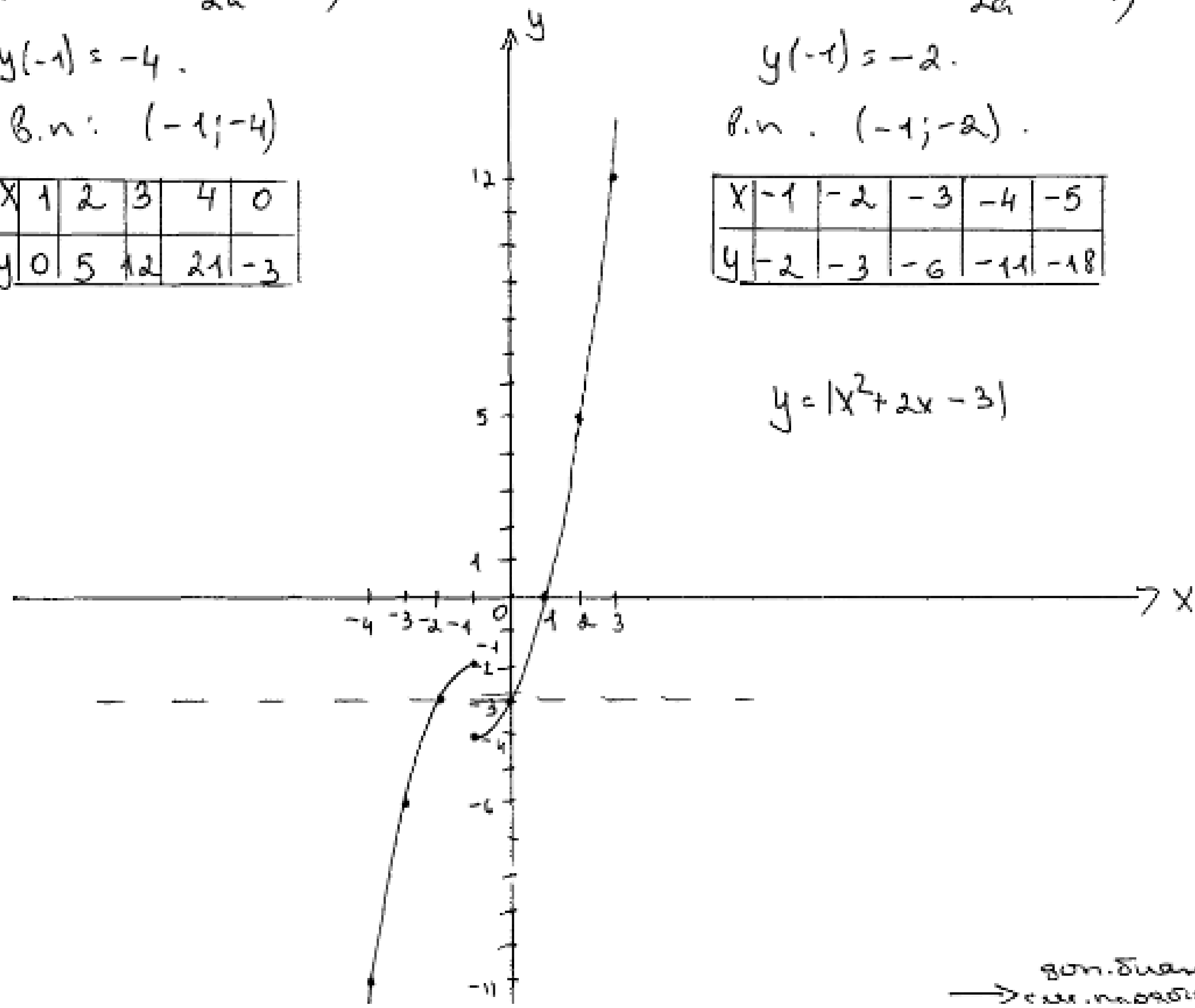
$a = -1 < 0$, ветви ↓

в.п: $x = \frac{-b}{2a} = -1;$

$y(-1) = -2.$

в.п. $(-1;-2)$.

x	-1	-2	-3	-4	-5
y	-2	-3	-6	-11	-18



$y = |x^2+2x-3|$

доп. бланк

→ см. продолжение

Функция $y=|x^2+2x-3|$ может иметь с прямой, параллельной оси абсцисс, максимум 2 общие точки.

Ответ: 2.

(24) Дано:

AB, CD – хорды;

$AB=14$;

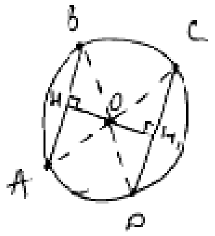
$CD=48$;

$OH=24$;

Найти:

OH_1 – ?

Решение:



1) Проведем радиусы: OB; OC; OA; OD

$OB=OC=OA=OD$; =>

$\triangle ABO$ – равнобедренный, $\triangle CDO$ – равнобедренный.

2) Рассмотрим $\triangle ABO$:

OH – перпендикуляр к AB (расстояние от т. до прямой.)

=> OH – высота. В равнобедренном $\triangle$ высота, проведенная к основанию (в данном случае $BO=AO$ (боковые)), является медианой и биссектрисой, =>

$AH=HB=7$.

3) По теореме Пифагора:

$HB^2+HO^2=BO^2$

$7^2+24^2=BO^2$ => $BO=25$

обратите сторону → см. продолжение

4) Рассмотрим $\triangle COD$:

равнобедренный, => аналогично OH_1 – высота, медиана и биссектриса, =>

$CH_1 = H_1D = 24$.

5) По т. Пифагора:

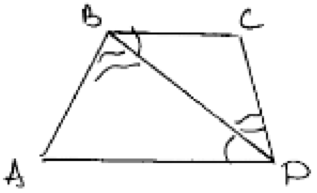
$OH_1^2 + CH_1^2 = OC^2$

$OH_1^2 + 24^2 = 25^2$ ($OC = OB = OA = OD$ как радиусы)

$OH_1 = 7$

Ответ: 7

25



Дано:
ABCD – трапеция;
$BC = 3$;
$AD = 12$;
$BD = 6$;
Доказать, что $\triangle CBD \sim \triangle BDA$.

Решение:

1) Т.к. ABCD – трапеция, а BC и AD – основания (по усл.), =>

• $\angle CBD = \angle BDA$ (накрест лежащие при $BC \parallel AD$ и секущей BD);

• $\angle CDB = \angle ABD$ (накрест лежащие при $BC \parallel AD$ и секущ. BD)

$\Downarrow$

$\triangle CBD \sim \triangle ABD$ (по 2-м углам = 1 признак подобия).

3)

ч.1.у.

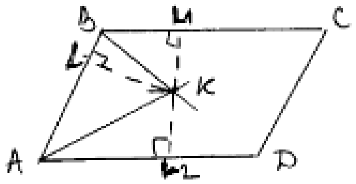
Дано:

ABCD – параллелограмм;

BC = 12

KL = 9

лист. N3 доп. бланк
→ см. продолжение



Решение:

1) Каждая точка биссектрисы угла равноудалена от сторон угла, поэтому:

при BK-биссектрисе

$KL = 9$ (усл.) и $KL_1 = 9$ (доп. построение),

при AK-биссектрисе

$KL = 9$ (усл.) и $KL_2 = 9$ (доп построение).

2) Из п.1 следует, что L_1L_2 - высота, которая равна 18.

3) $S_{ABCD} = LL_1 \cdot AD$. $AD = BC = 12$ (ABCD-параллелограмм)

$S_{ABCD} = 18 \cdot 12 =$ 216;

Ответ: 216.

Работа 6

№21

$(x-8)^2 < \sqrt{3}(x-8)$

$(x-8)^2 - \sqrt{3}(x-8) < 0$

$(x-8)(x-8) - \sqrt{3}(x-8) < 0$

$(x-8)(x-8-\sqrt{3}) < 0$

$(x-8)(x-(8+\sqrt{3})) < 0$

При $x=8$ и $x=8+\sqrt{3}$: выражение обра-щается в 0

$10 \in (8+\sqrt{3}; +\infty)$

1) Подставим $x=10$: $(10-8)(10-(8+\sqrt{3}))>0 \Rightarrow$ При $x>8+\sqrt{3}$ $(x-8)(x-(8+\sqrt{3}))>0$

2) Подставим $x=9$ $9 \in (8; 8+\sqrt{3})$ $(9-8)(9-(8+\sqrt{3}))<0 \Rightarrow$ При $x \in (8; 8+\sqrt{3})$ $(x-8)(x-(8+\sqrt{3}))<0$

3) Подставим $x=0$ $0<8$ $(0-8)(0-(8+\sqrt{3}))>0 \Rightarrow$ При $x \in (-\infty; 8)$: $(x-8)(x-(8+\sqrt{3}))>0$

Ответ: $(8; 8+\sqrt{3})$

№22

Пусть S км - половина пути, который был преодолен автомобилем. $S>0$

Тогда: $2S$ км - весь путь, преодоленный автомобилем.

$S/36$ ч и $S/99$ ч – время, затраченное автомобилем на преодоление 1-ой и 2-ой половин пути соответственно. Таким образом, средняя скорость автомобиля на всем пути равна $\frac{2S}{S/36+S/99}$ км/ч

$$\frac{2S}{\frac{S}{36}+\frac{S}{99}}=\frac{2S}{\frac{99S+36S}{36\cdot 99}}=\frac{2S\cdot 36\cdot 99}{99S+36S}=\frac{2\cdot 36\cdot 99\cdot \cancel{8}}{135\cdot \cancel{8}}=\frac{2\cdot 9\cdot 11\cdot \cancel{4}\cdot 12}{5\cdot \cancel{27}}=$$

$$=\frac{2\cdot 11\cdot 12}{5}=52{,}8 \text{ км/ч}$$

Ответ: 52,8 км/ч

№23

$y=|x^2+2x-3|$

Рассмотрим функцию $y=x^2+2x-3$.

Квадратичная функция, график – парабола, $a>0 \Rightarrow$ ветви вверх.

$x_0=\frac{-b}{2a}=\frac{-2}{2}=-1$

$y_0=1-2-3=-4$

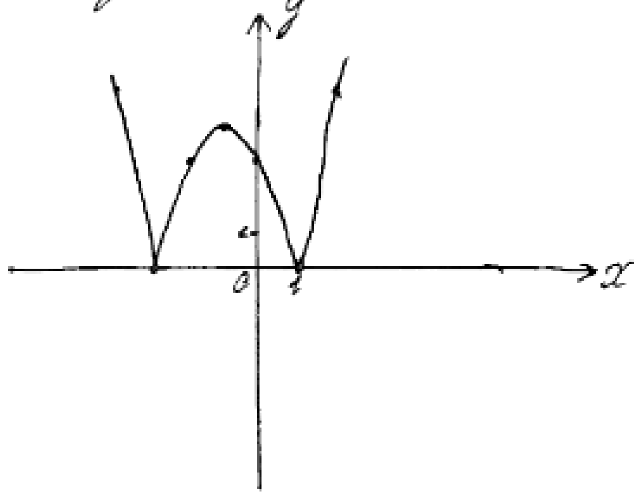
x	-1	0	-2	-3	1	2	-4
y	-4	-3	-3	0	0	5	5

График функции $y=|x^2+2x-3|$ отличается от функции $y=x^2+2x-3$ тем, что все точки, значения y которых для второго графика меньше 0, для

первого графика отражаются относительно оси абсцисс.
Преобразуем таблицу для функции
$y = |x^2+2x-3|$

x	-1	0	-2	-3	1	2	-4
y	4	3	3	0	0	5	5

Построим график.



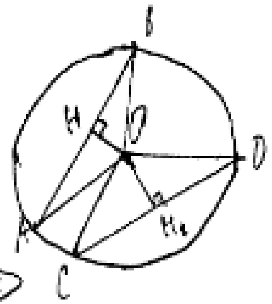
Прямая, параллельная оси абсцисс, имеет вид $y = m$
При $m < 0$ 0 точек пересечения.
При $m = 0$ 2 точки
При $m \in (0; 4)$ 4 точки
При $m = 4$ 3 точки
При $m > 4$ 2 точки
Таким образом, 4 точки.
Ответ: а) график построен
б) 4 точки

№24

Дано: $OH=24$
окружность с центром в O, $AB=14$, $CD=48$
AB и CD - хорды
OH и OH_1 - высоты

Найти
CH_1 - ?

Решение:



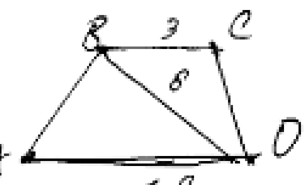
1) Рассм. ΔABO
$OB=OA$ (радиусы) $\Rightarrow$
ΔABO - равнобедр. $\Rightarrow$
OH - медиана $\Rightarrow AH=BH=0{,}5AB=7$
2) Рассм ΔCOD
$OC=OD$ (радиусы) $\Rightarrow \Delta COD$ - равнобедренный $\Rightarrow OH_1$ - медиана $\Rightarrow CH_1=DH_1=$
$=0{,}5CD=24$
3) По Th Пифагора $OH^2+HB^2=OB^2 \Rightarrow$
$OB=\sqrt{OH^2+HB^2}=25$
4) $OB=OD$ (радиусы)
5) По Th Пифагора $OH_1^2+H_1D^2=$
$=OD^2 \Rightarrow$ $\cancel{OD=\sqrt{OH_1^2+H_1D^2}}$ $OH_1=\sqrt{OD^2-H_1D^2}=$
$=\sqrt{25^2-24^2}=7$

Ответ: 7

№25

Дано:
$ABCD$;
$BC=3$, $AD=12$
$BD=6$
Д-ать: $\Delta CBD \sim \Delta BDA$

Док-во:



1) $\angle CBD=\angle BDA$
(накрест лежащие углы при параллельных прямых BC и AD и секущей BD)

№8

2) $\frac{BC}{BD} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

3) $\frac{BD}{AD} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

4) $\frac{BC}{BD} = \frac{BD}{AD}$ $\left.\right\}$ $\Rightarrow \triangle CBD \sim \triangle BDA$ (по 2 сторонам и углу между ними)

$\angle CBD = \angle BDA$

Ответ: ч. т. д.

№6

Дано:

▱ ABCD,

BM, AZ – биссектрисы.

BM пересекает AZ в K

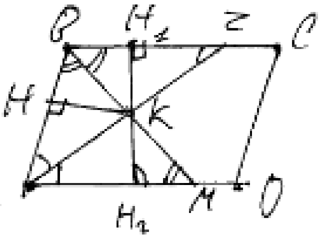
KH – высота

KH = 0

BC = 12

Найти: S_{ABCD}

Решение:



1) Проведём KH_1 и KH_2 – высоты из K к BC и AD соответственно.

2) Расм. $\angle H_1KH_2$

$\angle H_1KH_2 = \angle H_1KH + \angle HKH_2$

$\angle H_1KH = 360° - (\angle BH_1K + \angle KHB + \angle H_1BH) = 180° - \angle H_1BH$

$\angle H_2KH = 360° - (\angle HAH_2 + \angle KHA + \angle KH_2A) = 180 - \angle HAH_2$

$\angle H_1BH + \angle HAH_2 = 180°$ ст. к. ме прот.

вылежащие углы параллелограмма) =>

$180^\circ - \angle H_1BH = \angle HAH_2$
$180^\circ - \angle HAH_2 = \angle H_2BH$ $\Big\}$ => $\angle H_1KH_2 = \angle HAH_2 + \angle H_2BH = 180^\circ$ => $\angle H_1KH_2$ — развернутый, т.е. отрезок H_1H_2 проходит через K и является высотой ▱$ABCD$.

3) $\angle MAK = \angle KAB$ (AZ - бисс.)

~~$\angle MAK = \angle A$~~ $\angle MAZ = \angle AZB$ (накрест лежащие углы при параллельных прямых BC и AD и секущей ~~BM~~ AZ) =>
$\angle MAK = \angle KAB = \angle AZB$

~~4) $\angle KAB = \angle$~~ $\angle ABK = \angle KBZ$ (BM-бисс.)

$\angle MBZ = \angle BMA$ (накрест лежащие углы при параллельных прямых BC и AD и секущей BM) => $\angle ABK = \angle KBZ = \angle BMA$

$\angle KAB = \angle AZB$ => $\triangle ABZ$ - равнобедр. =>
$BZ = AB$

$\angle MBA = \angle BMA$ => $\triangle ABM$ - равнобедр. =>
$AM = AB$

4) Рассм $\triangle KBZ$; $\triangle KBA$ и $\triangle KMA$
$BZ = AM = AB$
$\angle KBA = \angle KBZ = \angle KMA$
$\angle KAB = \angle KZB = \angle KAM$ $\Big\}$ => $\triangle KBZ = \triangle KBA = \triangle KMA$ (по двум углам и стороне между ними)

5) Из пред. пункта: $KH = KH_1 = KH_2$ => $H_1H_2 = 2KH = 18$

6) $AD = BC$ (противоположн. стороны ▱$ABCD$) => $S_{ABCD} = H_1H_2 \cdot BC = 18 \cdot 12 = 216$ Ответ: 216

4

Работа 7

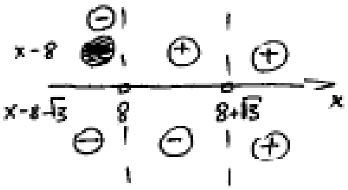
21 $(x-8)^2 < \sqrt{3}\,(x-8)$

$(x-8)(x-8-\sqrt{3}) < 0$

$y=(x-8)(x-8-\sqrt{3})$

$x-8=0 \qquad x-8-\sqrt{3}=0$

$x=8 \qquad x=8+\sqrt{3}$



$x\in(-\infty;8)$ $(x-8)(x-8-\sqrt{3})>0$

$x\in(8;8+\sqrt{3})$ $(x-8)(x-8-\sqrt{3})<0$

$x\in(8+\sqrt{3};+\infty)$ $(x-8)(x-8-\sqrt{3})>0$

Ответ: $x\in(8;8+\sqrt{3})$

22.

Дано:
S
$v_1=36$ км/ч
$v_2=99$ км/ч
$S_1=S_2=0{,}5S$

Найти:
$v_{ср}$-?

S - весь путь t_1 - время на участке S_1
t_2 - время на участке S_2

$t_1=\frac{S_1}{v_1} \quad t_2=\frac{S_2}{v_2}=\frac{0{,}5S}{v_2}$

$v_{ср}=\frac{\text{весь путь}}{\text{все время}}=\frac{0{,}5S+0{,}5S}{t_1+t_2}=\frac{S_1+S_2}{t_1+t_2}=$

$\frac{S}{\frac{0{,}5S}{v_1}+\frac{0{,}5S}{v_2}}=\frac{S}{\frac{0{,}5Sv_2+0{,}5Sv_1}{v_1\cdot v_2}}=\frac{S\cdot v_1\cdot v_2}{0{,}5S(v_1+v_2)}=\frac{2Sv_1\cdot v_2}{S(v_1+v_2)}$

$v_{ср}=\frac{2\cdot v_1\cdot v_2}{v_1+v_2}=\frac{2\cdot 36\cdot 99}{36+99}=\frac{2\cdot 36\cdot 99}{135}=52{,}8$ км/ч

Ответ: $v_{ср}=52{,}8$ км/ч.

23 $y=|x^2+2x-3|$ функция квадратичная графиком является парабола

$x^2+2x-3=0$

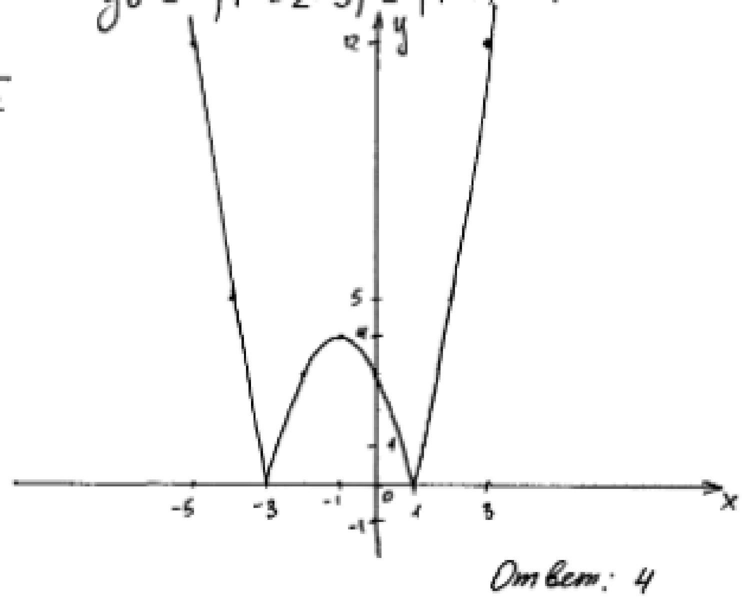
$D=4+12=4^2$

$x=\frac{-2\pm4}{2}=\begin{matrix}1\\-3\end{matrix}$

$x_в=\frac{-b}{2a}=\frac{-2}{2}=-1$

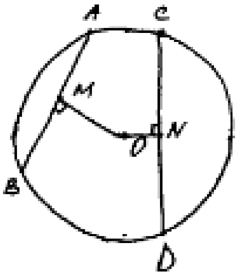
$y_в=|1^2-2-3|=|1-5|=4$

x	-5	-4	-3	-1	-2	0	1	2	3
y	12	5	0	4	3	3	0	5	12



Ответ: 4

24.



Дано:
окр (O; R)
$AO=OB=OC=OD=R$
$AB=14$
$CD=48$
$OM \perp AB$
$OM=24$
$ON \perp CD$

Найти:
$ON-?$

Чем ближе хорда к центру окружности, тем она больше
Самая большая хорда – диаметр

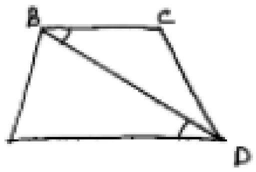
Расстояния до центра окружности относятся к длинам хорд как:

$\cancel{\frac{OM}{ON} = \frac{DC}{AB}}$ $\frac{OM}{ON} = \frac{CD}{AB}$ следовательно

$ON = \frac{OM \cdot AB}{CD} = \frac{24 \cdot 14}{48} = 7$

Ответ: $ON = 7$

25.



Дано:
ABCD - трапеция
$BC \parallel AD$
BD - диагональ
$BC=3$
$AD=12$
$BD=6$

Доказать:
$\triangle CBD \sim \triangle BDA$

1) $\angle CBD = \angle BDA$ (внутр. накрест лежащие при $BC \parallel AD$ и секущей BD)

2) $\frac{BC}{BD} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ $\frac{BD}{AD} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

следовательно $\frac{BC}{BD} = \frac{BD}{AD}$

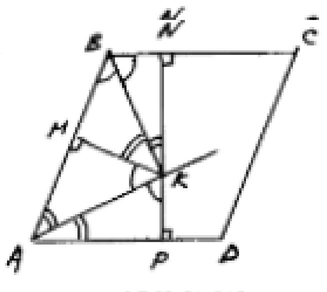
$\triangle CBD \sim \triangle BDA$ по 2 пропорциональным сторонам и углу между ними

ЧТД

26.

Дано:
ABCD - параллелограмм
BK – бис. $\angle B$
AK – бис. $\angle A$
$KM \perp AB$
$KM = 9$
$BC = AD = 12$
$NK \perp BC$
$KP \perp AD$

Найти:
$S_{ABCD}-?$



Работа 8

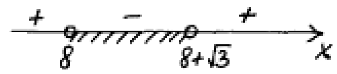
№21.

$(x-8)^2 < \sqrt{3}(x-8)$;

$(x-8)^2 - \sqrt{3}(x-8) < 0$;

$(x-8)(x-8-\sqrt{3}) < 0$;

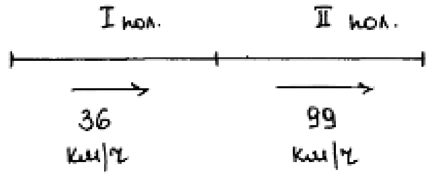
При $x = 8$ или $x = 8+\sqrt{3}$ – ~~все~~ неравенство обращается в ноль.



Ответ: $x \in (8;\ 8+\sqrt{3})$.

№22.

Пусть всё расстояние – это S, тогда половина пути – это $0{,}5S$ или $\frac{1}{2}S$.



	t, ч	V, км/ч	S, км
I половина пути	$\frac{0{,}5S}{36}$	36	$0{,}5S$
II половина пути	$\frac{0{,}5S}{99}$	99	$0{,}5S$

Составим выражение для нахождения средней скорости автомобиля на протяжении всего пути:

$$V_{ср.} = \frac{S}{{}^{99/}\frac{0{,}5S}{36} + {}^{36/}\frac{0{,}5S}{99}} = \cancel{\frac{S}{\frac{99S}{72\cdot 99}}} = \frac{S}{\frac{99S}{2\cdot 36\cdot 99} + \frac{36S}{2\cdot 36\cdot 99}} =$$

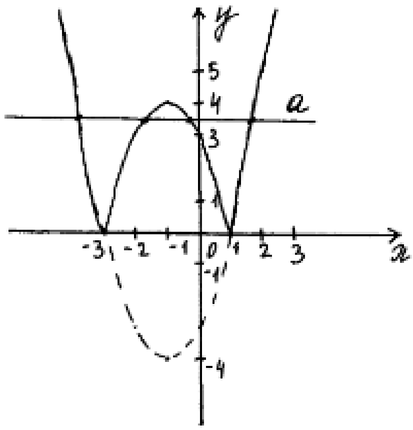
$$= \frac{S}{\frac{135S}{7128}} = \frac{7128\cancel{S}}{135\cancel{S}} = \frac{7128}{135} = 52{,}8 \text{ км/ч}$$

$$\begin{array}{r|l} 7128 & 135 \\ \underline{675} & 52{,}8 \\ 378 & \\ \underline{270} & \\ 1080 & \\ \underline{1080} & \\ 0 & \end{array}$$

Ответ: 52,8 км/ч.

<u>№ 23.</u> $y = |x^2 + 2x - 3|$

Построим график функции $y = |x^2 + 2x - 3|$ – парабола, ~~симметр~~ отображённая ~~симметрично~~ относительно оси Ox, (направленная ветвями вверх, т. к. $a = 1$, $1 > 0$).



~~Найдём вершину параб~~

Для начала построим график функции $y = x^2 + 2x - 3$ - парабола, направленная ветвями вверх ($a = 1$, $1 > 0$).

Найдём (координаты) вершину этой параболы:

$$x_B = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2} = -1.$$

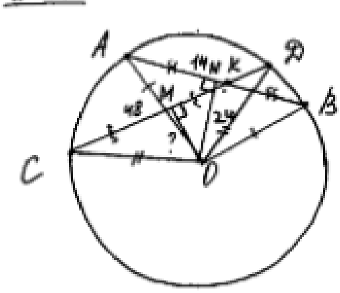
$$y_B = 1 - 2 - 3 = -4.$$

И теперь отобразим полученный график отн. оси Ox, это и будет график исходной функции (данной в задании).

Наибольшее количество общих точек графика функции $y = |x^2 + 2x - 3|$ и прямой a, параллельной оси абсцисс, – будет 4, (пример показан на рисунке выше).

Ответ: 4.

<u>№ 24.</u>



<u>Дано:</u> Окр-ть (O, r), AB и CD - хорды окр-ти, $AB = 14$, $CD = 48$, ON - расстояние от центра окружности O до AB, $ON \perp AB$, $ON = 24$.

<u>Найти:</u> OM - ?

<u>Решение:</u>

1. Проведём из центра окр-ти O радиусы к точкам A, B, C, D, лежащим на окр-ти.
2. Т.к. CO, OD, AO и OB - радиусы $\Rightarrow$ $CO = OD = AO = OB$ $\Rightarrow$ $\triangle COD$ и $\triangle AOB$ - равнобедренные.
3. Т.к. $\triangle COD$ и $\triangle AOB$ - равнобедренные, а ON и OM - расстояния →

от точки O до хорд AB и CD, $ON \perp AB$, $OM \perp CD$ $\Rightarrow$ OM и ON – являются медианами, высотами и биссектрисами.

4. Т.к. ON – медиана $\Rightarrow$ $AN = NB = \frac{1}{2} \cdot 14 = 7$.

5. Рассмотрим $\triangle ONB$ – прямоугольный ($ON \perp AB$):

по теореме Пифагора: $ON^2 + NB^2 = OB^2$

$$(24)^2 + (7)^2 = OB^2;$$

$$\sqrt{576 + 49} = OB;$$

$$\sqrt{625} = OB;$$

$$OB = 25.$$

6. Т.к. $OB = AO = OD = CO$ – радиусы $\Rightarrow$ $OB = OA = OD = CO = 25$.

7. Рассмотрим $\triangle COD$: т.к. OM – медиана $\Rightarrow$ $CM = MD = 48 \cdot \frac{1}{2} = 24$.

8. Рассмотрим $\triangle COM$ – прямоугольный ($OM \perp CD$):

по теореме Пифагора: $OM^2 + CM^2 = CO^2$;

$$OM^2 + (24)^2 = (25)^2;$$

$$OM^2 = 625 - 576;$$

$$OM = \sqrt{49};$$

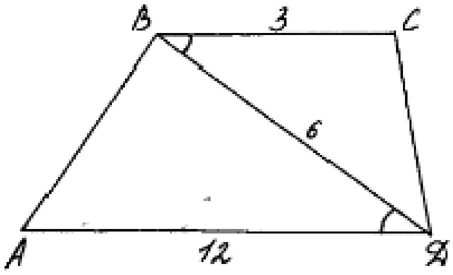
$$OM = 7.$$

Ответ: 7

№ 25.

Дано: ABCD – трапеция, AD и BC – основания, $AD = 12$, $BC = 3$, BD – диагональ, $BD = 6$.

Доказать: $\triangle CBD \sim \triangle BDA$.

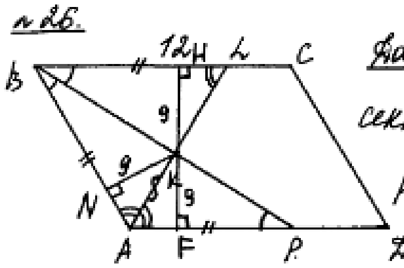


Доказательство:

1. Рассмотрим $\triangle ABD$ и $\triangle CBD$:

1) $\angle CBD = \angle BDA$ – как накрест лежащие при $AD \parallel BC$.

№26.



Дано: $ABCD$ – параллелограмм, AL и BP – биссектрисы углов $\angle A$ и $\angle B$, т. K – точка пересечения биссектрис, $BC = 12$, $KN \perp AB$, $KN = 9$, (KN – расстояние от т. K до прямой AB).

Найти: $S_{ABCD} = ?$

Решение:

1. Рассмотрим $\triangle BAP$: $\angle ABP = \angle CBP$ – по условию (AL – биссектриса)
$\angle APB = \angle CBP$ – как накрест лежащие при $BC \parallel AD$.
$\Downarrow$
$\angle ABP = \angle APB \Rightarrow \triangle BAP$ – равнобедренный. $\Rightarrow AB = AP$.

2. Рассмотрим $\triangle ABL$: $\angle BAL = \angle LAP$ – по условию (BP-биссектриса). $\rightarrow$

$\underbrace{\angle KAD = \angle BLA}$ – как накрест лежащие при $AD \parallel BC$.

$\Downarrow$

$\angle BAL = \angle BLA \Rightarrow \triangle ABL$ – равнобедренный $\Rightarrow AB = BL$.

3. Из п. 1 и 2 $\Rightarrow AB = AP = BL$.

4. Рассмотрим $\triangle AKP$ и $\triangle BKL$:

1) $\angle LAP = \angle BLA$ – как накрест лежащие при $AD \parallel BC$.

2) $\angle BPA = \angle LBP$ – как накрест лежащие при $AD \parallel BC$.

3) $AP = BL$ – из п. 1,2 и 3.

по II признаку равенства треугольников
$\Downarrow$
$\triangle AKP$ и $\triangle BKL$.

5. Рассмотрим $\triangle BKA$ и $\triangle AKP$:

1) $BA = AP$ – из п. 1,2 и 3.

2) $\angle BAK = \angle KAP$ – по условию (AL – биссектриса).

3) AK – общая.

по I признаку равенства треугольников
$\Downarrow$
$\triangle BKA = \triangle AKP$.

6. Т.к. $\triangle AKP = \triangle BKL$ и $\triangle BKA = \triangle AKP \Rightarrow \triangle AKP = \triangle BKL = \triangle BKA$.

7. Проведём высоты в $\triangle BKL$ и $\triangle AKP$ к основаниям BL и AP KH и KF аналогичные $KN \perp AB$ в $\triangle BKA$.

8. Т. к. в равных треугольниках соотв. элементы равны, то $KH = KF = KN = 9$.

9. Т.к. $BC \parallel AD$, $KH \perp BC$, $KF \perp AD$, KH и $KF \in FH$ $(KH + KF = FH)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow FH \perp BC$, $FH \perp AD \Rightarrow FH$ – высота $ABCD$.

10. Т.к. $KH + KF = FH \Rightarrow 9 + 9 = 18$, $FH = 18$.

11. $S_{ABCD} = BC \cdot FH = 12 \cdot 18 = 216$.

Ответ: 216.

Работа 9

№21

$x^3+2x^2-x-2=0$

$x^2(x+2)-(x+2)=0$

$(x+2)(x^2-1)=0$

$(x+2)(x-1)(x+1)=0$

$\left[\begin{array}{l} x+2=0 \\ x-1=0 \\ x+1=0 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$ Ответ: $-2;\ -1;\ 1$

№22.

Пусть $x\ \frac{км}{ч}$ - скорость второго автомобиля, тогда $(x+24)\ \frac{км}{ч}$ - скорость первого автомобиля.

	S, км	V, $\frac{км}{ч}$	t, ч
1.	420	$x+24$	$\frac{420}{x+24}$
2.	420	x	$\frac{420}{x}$

Известно, что первый прибыл к финишу на 2 часа раньше.

Составим и решим уравнение.

$\frac{420}{x+24}+2=\frac{420}{x} \ \Big| \cdot x(x+24)$ ОДЗ: $x\neq 0$, $x\neq -24$

$\cancel{420x}+2x(x+24)=\cancel{420x}+420\cdot 24$

$2x^2 + 24x \cdot 2 - 420 \cdot 24 = 0 \quad |:2$

$x^2 + 24x - 5040 = 0.$

$D_1 = k^2 - ac = 144 + 5040 = 5184 > 0 \Rightarrow$ 2 корня

$x_1 = -12 + 72 = 60$

$x_2 = -12 - 72 = -84$ — не удовлетворяет условию.

$V_1 = x + 24 = 60 + 24 = 84 \left(\frac{км}{ч}\right).$

Ответ: $84 \frac{км}{ч}$.

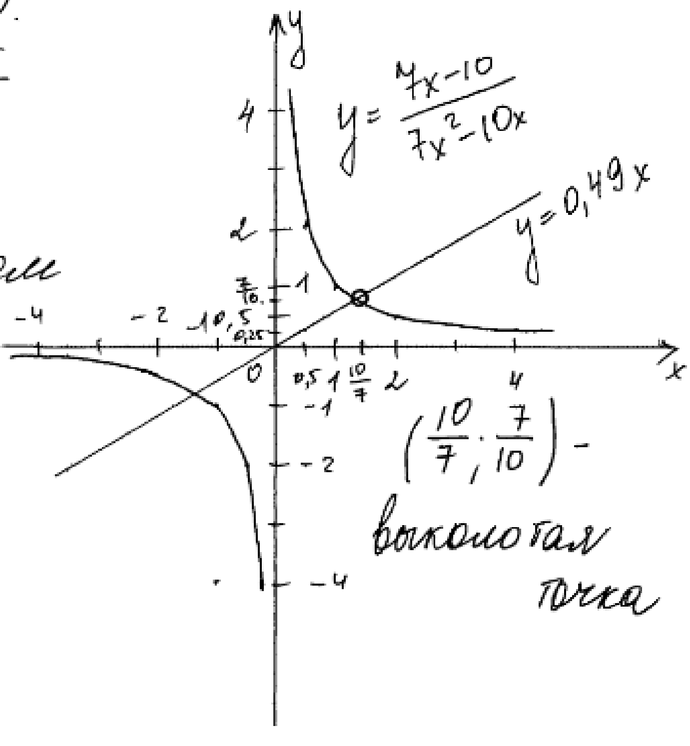
№23.

$y = \frac{7x-10}{7x^2-10x} = \frac{7x-10}{x(7x-10)} = \frac{1}{x} \qquad D(y) \cdot x \neq \frac{10}{7}$

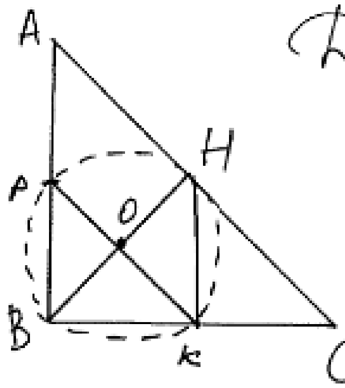
$y = \frac{1}{x}$ — обратная пропорциональность, графиком является гипербола с выколотой точкой $\left(\frac{10}{7}; \frac{7}{10}\right)$.

x	1	−1	2	0,5	4	−2	−4	−0,5
y	1	−1	0,5	2	0,25	−0,5	−0,25	−2

Прямая $y = kx$ имеет с графиком функции ровно 1 общую точку при $k = 0,49$.



№24.



Дано: $\triangle ABC$ - прямоугольный

$BH \perp AC$

$\omega\left(O; \frac{BH}{2}\right)$

$\omega \cap AB = P$

$\omega \cap AB = K$

$PK = 11$

Найти: BH

Решение:

1. Рассмотрим $\triangle PBK$ и $\triangle BHK$

1. $\angle PBK = \angle HKB = 90^\circ$
2. $\angle BPK = \angle BHK$
(вписанные углы, опираются на одну дугу)
3. BK - общая

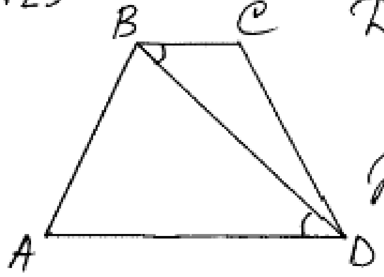
$\Rightarrow \triangle PBK = \triangle BHK$ по стороне и двум прилежащим к ней углам

$\Downarrow$

$BH = PK = 11$

Ответ: $BH = 11$

№25



Дано: ABCD - трапеция

$BC = 9$; $AD = 36$; $BD = 18$.

Доказать: $\triangle CBD \sim \triangle BDA$.

Доказательство:

1. Рассмотрим $\triangle CBD$ и $\triangle BDA$.

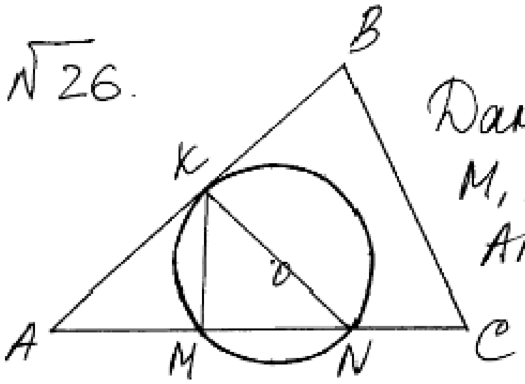
$\angle CBD = \angle BDA$ (накрест лежащие при $BC \parallel AD$, секущая BD)

$\frac{BC}{BD} = \frac{BD}{AD} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ $\triangle CBD \sim \triangle BDA$ по двум пропорциональным сторонам и углу между ними

ч. т. д.

№26.



Дано: $\triangle ABC$.

$M, N \in AC$.

$AM = 16$; $AN = 39$

$M, N \in \omega(O; r)$

K - точка касания

$\cos \angle BAC = \frac{\sqrt{39}}{8}$

Найти: r - ?

Решение:

1. $AK^2 = AM \cdot AN$ (по теореме о касательной и секущей)
$AK^2 = 16 \cdot 39 = 624$.

2. Рассмотрим $\triangle AKN$.
$\angle KAN = \frac{1}{2} \cup KM$ (по теореме об угле между секущей и касательной)
$\angle KNM = \frac{1}{2} \cup KM$ (вписанный угол)
$\Rightarrow \triangle AKN$ – р/б.

$KN = AK$
$\cos\angle BAC = \cos\angle KNM$.

3. Рассмотрим $\triangle KMN$: ($MN = AN - AM = 39 - 16 = 23$)
$KM^2 = KN^2 + MN^2 - 2KM \cdot KN \cdot \cos\angle KNM$.
$KM = \sqrt{624 + 529 - 2 \cdot 23 \frac{\sqrt{39}}{8} \cdot 4\sqrt{39}} = \sqrt{1153 - 897} = 16$
(по теореме косинусов)

4. по теореме синусов:
$$\frac{KM}{\sin\angle KNM} = 2R \Leftrightarrow R = \frac{KM}{2\sin\angle KNM}$$

~~sin∠KNM~~
$\sin^2\angle KNM + \cos^2\angle KNM = 1$ – основное тригонометрическое тождество
$\sin\angle KNM = \sqrt{\frac{25}{64}} = \frac{5}{8}$

$$R = \frac{16}{\frac{10}{8}} = 16 \cdot \frac{4}{5} = \frac{64}{5} = 12\frac{4}{5} = 12,8$$

Ответ: $R = 12,8$.

Работа 10

21) $x^3+2x^2-x-2=0$

$x^2(x+2)-1(x+2)=0$

$(x^2-1)(x+2)=0$

$(x+1)(x-1)(x+2)=0$

$x+1=0$ или $x-1=0$ или $x+2=0$

$x=-1$ $\quad x=1$ $\quad x=-2$

Ответ: $-1;\ 1;\ -2.$

22)

	S, км	V, км/ч	t, ч
1-ый	420 км	$v+24$ км/ч	$\frac{420}{v+24}$ ч
2-ой	420 км	v км/ч	$\frac{420}{v}+2$ ч

1) $\frac{420}{v+24}+2=\frac{420}{v}$ $\quad$ $\boxed{\text{ОДЗ: } v\neq 0;\ -24}$

$420v+2v^2+48v=420v+10080$

$2v^2+48v-10080=0$

$v^2+24v-5040=0$

$\sqrt{D}=\sqrt{\frac{(\frac{1}{2}b)^2-ac}{a}}=\sqrt{\frac{(12)^2+5040}{1}}=\sqrt{144+5040}=\sqrt{5184}=72$

$\boxed{v>0}$ $\quad v=\frac{-\frac{1}{2}b+\sqrt{D}}{a}=\frac{-12+72}{1}=60$ км/ч $-$ 2-ой

2) $v+2u=60+24=84$ км/ч — 1-ый

Ответ: 84 км/ч.

23) $y=\dfrac{7x-10}{7x^2-10x}$

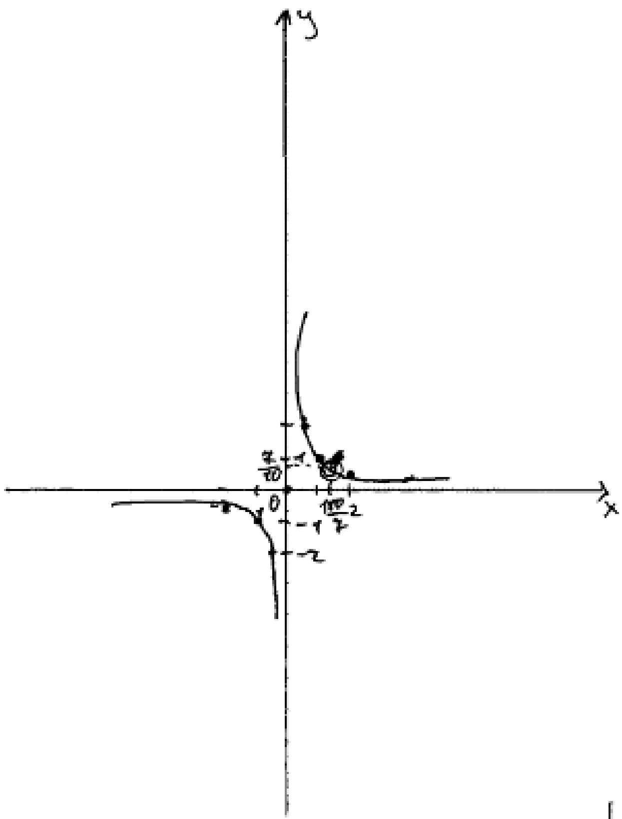
$y=\dfrac{7x-10}{x(7x-10)}$ $\boxed{\text{ООФ}: x\neq 0;\ \dfrac{10}{7}}$

$y=\dfrac{1}{x}$

1) графиком является гипербола

2)

x	1	2	$\frac{10}{7}$
y	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{10}$



3) $y=kx$

$k=\dfrac{y}{x}=\dfrac{\frac{7}{10}}{\frac{10}{7}}=\dfrac{7\cdot 7}{10\cdot 10}=\dfrac{49}{100}=0{,}49$

Ответ: $0{,}49=k$.

24) Дано:
ΔABC
$\angle B=90^\circ$
$BH\perp AC$
BH – диаметр окружность
$P\in AB$
$K\in BC$; $PK=11$

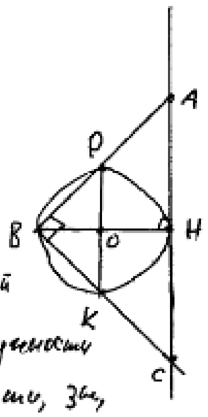
Найти: BH – ?

решение:

1) $\angle PBK$ опирается на дугу $\cup PK$, также $\angle PBK=90^\circ$ (по условию), зн., $\cup PK=180^\circ$, т.к. $\angle PBK$ – вписанный

2) т.к. $\cup PK=180^\circ$, то PK – диаметр окружности

3) BH и PK – диаметры одной окружности, зн,

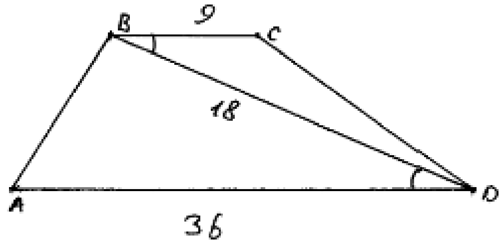


$BH = PK = 11.$

Ответ: $BH = 11.$

25) Дано:
ABCD - трапеция
BC и AD - основания
$BC = 9$
$AD = 36$
$BD = 18$

Д-ть: $\triangle CBD \sim \triangle BDA$ -?



Д-во:

1) рассмотрим $\triangle CBD$ и $\triangle BDA$:

1) $\frac{BC}{BD} = \frac{BD}{AD} = \frac{9}{18} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

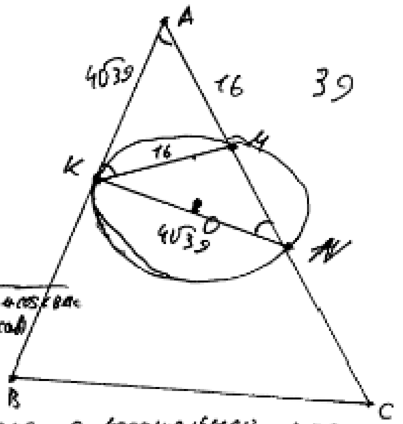
2) $\angle CBD = \angle ADB$ (как НЛУ при $BC \parallel AD$ и секущей BD),

Зн., $\triangle CBD \sim \triangle BDA$ (по двум пропорциональным сторонам и углу между ними)

доказано!

26) Дано:
$\triangle ABC$
M и $N \in AC$
$AM = 16$
$AN = 39$
Окружность
AB - касательная
$\cos\angle BAC = \frac{\sqrt{39}}{8}$

Найти: R-?



решение:

1) проведём отрезок KM:

1) рассмотрим $\triangle AKM$:

1) $KM = \sqrt{KA^2 + AM^2 - 2 \cdot AK \cdot AM \cdot \cos\angle BAC}$ (по теореме косинусов)

2) $AK^2 = AM \cdot AN = 16 \cdot 39 =$
624
$AK = \sqrt{624} = 4\sqrt{39}$ (по теореме о касательной и секущей, выходящих из одной вершины)

$$KM = \sqrt{(4\sqrt{39})^2 + (16)^2 - 2\cdot 4\sqrt{39}\cdot 16\cdot \frac{\sqrt{39}}{8}}$$

$$KM = \sqrt{624 + 256 - 624}$$

$KM = \sqrt{256} = 16$, зн,

т.к. $KM = AM = 16$, $\triangle AKM$ - р/б (по определению р/б $\triangle$)

2) проведём отрезок KN

1) рассмотрим $\triangle AKN$:

1) $KN = \sqrt{AK^2 + AN^2 - 2\cdot AK\cdot AN\cdot \cos\angle BAC}$

(по теореме косинусов)

$$KN = \sqrt{(4\sqrt{39})^2 + (39)^2 - 2\cdot 4\sqrt{39}\cdot 39\cdot \frac{\sqrt{39}}{8}}$$

$$KN = \sqrt{624 + 1521 - 1521}$$

$KN = \sqrt{624} = 4\sqrt{39}$,

зн., т.к. $KN = AK = 4\sqrt{39}$, то $\triangle AKN$ - р/б (по определению р/б $\triangle$)

2) т.к. $\triangle AKN$ - р/б, то $\angle KAN = \angle KNA$ (по св-у р/б $\triangle$),

зн., $\cos\angle KAN = \cos\angle BAC = \cos\angle KNA = \frac{\sqrt{39}}{8}$

3) $\sin\angle KNA = \sqrt{1 - (\cos\angle KNA)^2} = \sqrt{1 - \frac{39}{64}} = \sqrt{\frac{25}{64}} =$

$= \frac{5}{8}$

рассмотрим $\triangle MKN$:

3) $\triangle MKN$ - вписанный,

зн., $\frac{KM}{\sin\angle KNM} = 2R$ (по теореме синусов)

$\frac{16}{\frac{5}{8}} = 2R$ $\quad 2R = 25,6$

$R = \frac{2R}{2} = \frac{25,6}{2} = 12,8$

Ответ: $12,8 = R$.

Ответы к итоговому зачету

	№20	*№21*	*№22*	*№23*	*№24*	*№25*
1	2	2	1	2	2	X
2	0	2	0	2	2	1
3	2	0	0	2	2	0
4	0	0	0	0	1	X
5	2	2	0	2	0	1
6	2	2	2	1	2	1
7	2	2	0	0	2	0
8	2	2	2	2	0	1
9	2	2	2	0	2	2
10	2	0	0	2	1	2